



O nauczaniu matematyki

Michał Szurek

Jak się uczyć?

Logika

tom 4

Michał Szurek

O nauczaniu matematyki

Wykłady
dla nauczycieli
i studentów

tom **4**

Projekt graficzny, okładka: *Rafał Szczawiński, Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc, Jerzy Trzeciak*

Korekta techniczna: *Jacek Foromański*

Korekta językowa: *Aleksandra Golecka-Mazur*

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-394-4

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59

tel./fax 0 801 643 917, fax (58) 340 63 61

tel. (58) 340 63 60, 340 63 63

<http://www.gwo.pl> e-mail: gwo@gwo.pl

Spis treści

Wykład 8. Jak się uczyć?

O pracy umysłowej	9
Pamięć i zapamiętywanie	13
Poszerzanie a pogłębianie	22
Rozumienie	23
Zapominanie	33
Intuicja prawej półkuli i chłodny rozsądek lewej	36
Wyobraźnia i tworzenie pojęć	38
Dydaktyka psychologiczna Jeana Piageta	39
Trudna sztuka tłumaczenia, o co chodzi	47
Zadania powtórzeniowe	51

Wykład 9. Logika

Czy logika formalna pomaga w logicznym myśleniu?	55
Jak rozumujemy?	62
Klasyczna logika formalna	72
Sylogizmy	76
Oliwa sprawiedliwa zawsze na wierzch wypływa!	81
Ćwiczenia z logiki	84
Ciekawostki logiczne	89
Indukcja matematyczna	100
Zadania powtórzeniowe	116

Skorowidz osobowy	123
-------------------------	-----

Skorowidz rzeczowy	125
--------------------------	-----

paraboli i ewentualnie dowodzimy wzorów Viète'a. Zajmuje nam to jedną lekcję. Dwie następne przeznaczamy na powtórzenie materiału. Podstawienie do wzoru i obliczenia algebraiczne nie są przecież trudne — a takie zagadnienia omawia się w gimnazjum. W ten sposób temat „równania kwadratowe” mamy zrealizowany w tydzień. Wracamy do niego przy powtórzeniu materiału, przy końcu roku — wykazujemy w ten sposób, że spiralna metoda nauczania nie jest nam obca.

Trudna sztuka tłumaczenia, o co chodzi

*Chodzi mi o to, aby język giętki
Powiedział wszystko, co pomyśli głowa.*

Juliusz Słowacki, *Beniowski*, pieśń 3

Często zapominamy o oczywistej prawdzie: uczenie jest sztuką i umiejętnością, która nie jest tożsama z sumą posiadanych wiadomości na dany temat. Wybitny specjalista w danej dziedzinie nie musi być dobrym wykładowcą, chociaż na ogół potrafi wytworzyć wokół własnych zajęć klimat zainteresowania. W szkole, nawet licealnej, dobrzy matematycy rzadko bywają dobrymi nauczycielami. Jest wiele prawdy w poglądzie, że dobrym nauczycielem jest ten, kto sam miał kiedyś trudności jako uczeń. Po prostu lepiej rozumie swoich aktualnych uczniów i ich problemy.

Wydaje się, że zasada, by wyklądać swoją myśl jasno i by uczyć przystępnie, jest oczywista i niewzruszona. Nie wszyscy wielcy uczeni tak uważali. Na przykład Newton pisał swoje dzieła specjalnie w sposób zawiły, żeby uniknąć ewentualnej polemiki. Dziś jednak skłonni jesteśmy uważać, że właśnie umiejętność przekazania swojej wiedzy świadczy o prawdziwej mądrości. Zwracali na to uwagę filozofowie starożytni, a od czasów Odrodzenia także europejscy. Jak pisze Eugenio Garin²², Francesco Petrarca, którego dzieła tak bardzo zaważyły — bardziej niż się sądzi — na całej kulturze i mentalności europejskiej począwszy od XIV wieku, stawiał zawsze na czele postulat jasności i komunikatywności. „Scientis signum posse docere” („Cechą tego, kto ma wiedzę, jest to, że potrafi nauczyć”).

Pomówmy krótko o sztuce przygotowywania referatów i ogólniej, kompozycji wszelkich ustnych wypowiedzi. W matematyce sprawa jest prostsza niż w innych przedmiotach nauczanych w szkole. Po prostu w naszej nauce

²² Eugenio Garin, *Powrót filozofów starożytnych*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 1993.

najbardziej decydujące są sprawy merytoryczne. Ale — jak mawiał jeden z najwybitniejszych polskich matematyków Andrzej Mostowski (1913–1975) — wszystko można zrobić dowolnie źle.

Jak zatem wygłosić dobry referat matematyczny? Oto kilka rad. Jeśli Czytelnik uzna je za oczywiste i nieodkrywcze, to bardzo dobrze!

- Musisz dobrze rozumieć, o czym będziesz mówić. Nie kompromituj się czytaniem napisanego przedtem tekstu. Mów z pamięci — kartka może posłużyć ci w ostateczności, do przepisania długich wzorów.
- Nie mów do nauczyciela, do prowadzącego seminarium. Mów do słuchaczy, nawet jeśli są to twoi koledzy.
- Mów tak, by nie tylko dało się zrozumieć, ale by nie dało się nie zrozumieć.
- Pamiętaj, że włożyłeś w przygotowanie referatu wiele pracy. To, co już „przetrawiłeś”, jest nowe dla słuchaczy. Zwolnij. Zastanów się, jak wytłumaczyć najtrudniejsze fragmenty.
- Przecwicz wygłoszenie referatu w domu. Jeżeli wiesz, że masz się zmieścić w oznaczonym czasie, pamiętaj, że wygłaszanie „treningowe” zajmuje mniej więcej połowę tego czasu, co prawdziwe. Zaplanuj sobie, co zrobisz, gdy w drugiej połowie referatu zorientujesz się, że brakuje ci czasu. Co możesz opuścić, a czego nie?
- W większości przypadków przed ustnym egzaminem znasz już obszerną listę zagadnień, z których części zostaniesz odpytany. Przygotuj się do odpowiedzi nie tylko merytorycznie. „Z naszych słów układamy mozaikę idei. Regułę jej układania dostarcza sztuka retoryki”²³. Znana od starożytności nauka retoryki ma pięć działów: *inventio* (sposoby wynajdywania i opracowania tematu), *dispositio* (sposoby porządkowania materiału i wyboru kompozycji całości wystąpienia), *elocutio* (sztuka ubierania myśli w słowa), *memoria* (sztuka zapamiętywania przygotowywanego tekstu) i *actio* (sposób jego wygłoszenia). Pamiętaj o tych pięciu stopniach przygotowania wystąpienia.

Ćwiczenie 8.9. Spójrz na poniższy przykład: „referat” wygłoszony przez podmiot liryczny wiersza Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego *Rozmowa liryczna*. Przeprowadź analizę tego referatu zgodnie z zasadami *dispositio* i *elocutio*. Zgodnie z tymi zasadami organizuj swoje wystąpienia, tak wygłaszaj referaty na seminariach. Pomogę ci w analizie. Potraktuj całkiem poważnie moje uwagi. Prawie poważnie... bo jest trochę prawdy w stwierdzeniu, że ten wiersz Gałczyńskiego był przyczyną powstania książki, którą właśnie czytasz.

²³ Według Arystotelesa retoryka jest to odkrywanie tego, co w odniesieniu do każdego przedmiotu może być przekonujące; według: *Retoryka. Poetyka*, tłum. Henryk Podbielski, PWN, Warszawa 1988.

- Wstęp. Osoba, do której mówisz, → — Powiesz mi, jak mnie kochasz?
 sprawdza, czy jesteś przygotowany.
 Jesteś! Wiesz, że jesteś! → — Powiem.
 Teraz już powinna ci przejść treść. → — Więc?
 Pierwsze słowa są bardzo ważne. → — Kocham cię w słońcu. I przy blasku świec.
 Po nich konkrety, bez wodolejstwa. → Kocham cię w kapeluszu i w berecie.
 Początki ogólnej teorii. W wielkim wietrze na szosie i na koncercie.
 W bzach i w brzościach, i w malinach,
 i w klonach.
 I gdy śpisz. I gdy pracujesz skupiona.
 Po dłuższym fragmencie, wymagającym → I gdy jajko rozłukujesz ładnie —
 od słuchaczy skupienia uwagi można nawet wtedy, gdy ci łyżka spadnie.
 pozwolić sobie na swobodniejszy ton. W taksówce. I w samochodzie. Bez wyjątku.
 I na końcu ulicy. I na początku.
 Wygłaszający dowodzi swojej biegłości → I gdy włosy grzebieniem rozdzielisz.
 w temacie. Powinien jednak zwolnić W niebezpieczeństwie. I na karuzeli.
 tempo wykładu, rozwinąć temat, podać W morzu. W górach. W kaloszach. I bosy.
 przykłady, zilustrować wywód na Dzisiaj. Wczoraj. Jutro. Dniem i nocą.
 przykład zdjęciami z gór. I wiosną, kiedy jaskółka przylata.
 Osoba, do której mówisz, stopuje cię → — A latem jak mnie kochasz?
 trochę pytaniem o przykład.
 Lakoniczna, streszczająca odpowiedź → — Jak treść lata.
 potwierdza, że temat jest przez ucznia
 przemyślany i że porusza się on po nim
 z dużą swobodą. Ocena: bdb.
 Końcowe pytania kontrolne mają → — A jesienią, gdy chmurki i humorki?
 w zasadzie na celu przybliżenie — Nawet wtedy, gdy gubisz parasolki.
 słuchaczom treści, umożliwienie — A gdy zima posrebrzy ramy okien?
 uzupełnienia notatek itp. Rozwinięta — Zimą kocham Cię jak wesoły ogień.
 odpowiedź to okazja do przypomnienia Blisko przy Twoim sercu. Koło niego.
 o ścieżkach dydaktycznych: polecamy A za oknami śnieg. Wrony na śniegu.
 słuchaczom zajrzeć do teorii ciepła
 z fizyki, przypomnieć sobie działanie
 serca, omówić krwioobieg u ssaków,
 znaleźć w Internecie szlaki wędrówek
 ptaków...
 Podanie literatury jest zawsze → Konstanty Ildefons Gałczyński,
 obowiązkowe. *Rozmowa liryczna*, 1950

W styczniu 2006 roku poprosiłem uczestników pewnego seminarium, by napisali, szybko i bez zastanawiania się (w ciągu 10 minut), co to jest sinus, co to jest całka i co to jest abstrakcja. Zaproponowałem dwie konwencje: ma to być hasło do encyklopedii albo wyjaśnienie dla nieznanego w pociągu dalekobieżnym. Wśród słuchaczy (około 15 osób) było kilku pracowników naukowych. Eksperyment powtórzyłem kilka dni potem na grupie studentów innego ośrodka naukowego. Polecam Czytelnikom-nauczycielom powtórzenie tego

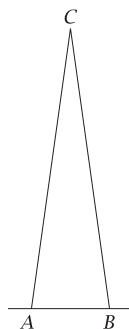
Z reguły wnioskowania na oddzielne traktowanie zasługują reguły Claviusa:

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p, \quad (p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$$

Mówią one, że jeżeli z zaprzeczenia jakiegoś zdania wyprowadzimy to właśnie zdanie, to musi być ono prawdziwe. Reguły te stosujemy najczęściej, gdy twierdzenie, którego dowodzimy, ma postać negacji. Na przykład weźmy pod uwagę twierdzenie głoszące, że przez dany punkt C nieleżący na danej prostej l można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do danej.

Możemy je udowodnić nie wprost, przypuszczając, że istnieje więcej takich prostych. Zakładamy, że kąty przy wierzchołkach A i B są proste. Przypuśćmy teraz, że zdanie p : Punkty A i B są równe jest fałszywe. To znaczy, że $A \neq B$. Wtedy kąt przy wierzchołku C jest dodatni, a więc suma miar kątów $A + B + C$ jest większa niż 180° — czyli jednak A musi się równać B . Na mocy twierdzenia o sumie kątów trójkąta wnioskujemy, że zdanie p musi być nieprawdziwe.

Wykazaliśmy więc, że z zaprzeczenia zdania p wynika prawdziwość zdania p . Reguła Claviusa stwierdza, że w takim razie zdanie p jest udowodnione. Być może ze względu na te trudności logiczne ścisły dowód wspomnianego twierdzenia jest obecnie w szkole pomijany. Twierdzenie jest zresztą bardzo intuicyjne.



Oliwa sprawiedliwa zawsze na wierzch wypływa!

*Dostosować sposób gry do nowych reguł
w efektownym fałszu ukryć się
potrafiłabym to zrobić dla innego
a dla ciebie, a dla ciebie — nie.
Już nie umiem mojej prawdy minąć granic
I to chyba jest niedobry znak
że przed innym nie odkryłabym jej za nic
a przed tobą, a przed tobą — tak.*

Piosenka Jerzego Wasowskiego do słów Jeremiego Przybory,
wyk. Kalina Jędrusik

Temat, o którym tu piszę, można z powodzeniem wykorzystać na lekcji. Połóż na stole kilka przedmiotów i w myśli wybierz jeden z nich. Zaraz zgadnę, co wybrałeś. Musisz tylko odpowiedzieć na kilka pytań: „tak” lub „nie”... Słucham?

Mówisz, że to przecież banalne? Tak, ale nie zdążyłem powiedzieć, że możesz kłamać i to kiedy chcesz... Musisz tylko obiecać (i słowa dotrzymać), że skłamiesz co najwyżej ileś razy.

Pokażę na prostym przykładzie jak wyglądałoby odgadywanie. Powiedzmy, że do wyboru masz agraftkę, bibułę, cukierek, dyskię, ekierkę, flamaster, gumkę i herbatnik. Przypuśćmy, że wybrałeś cukierek i obiecałeś, że nie skłamiesz więcej niż dwa razy. Rysuję tabelkę, wpisuję w nagłówkach kolumn możliwą liczbę kłamstw i dzielę zbiór przedmiotów na dwie równe albo prawie równe części:

0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
<i>a, b, c, d</i>			
<i>e, f, g, h</i>			

Pytam teraz: „Czy wybrany przedmiot jest w górnej połówce tabelki?”. Jeżeli usłyszę „tak”, to przesuwam „dolne” przedmioty (te z dolnego wiersza tabeli) do następnej kolumny. Na „nie” przesuwam „górne”. Następnie znów rozmieszczam przedmioty mniej więcej po równo w wierszach tabeli (to przyspiesza odgadywanie). Jeżeli w wierszu wszystkie pozycje oprócz ostatniej są puste, to przesuwam do niego niektóre przedmioty (symbole) z pozostałego wiersza. Następnie znów pytam, czy wybrany przedmiot jest w górnej części tabeli.

Przypuśćmy zatem, że na początkowe pytanie odpowiedziałeś „nie”. Zatem skłamałeś (ale oczywiście ja tego nie wiem). Przesuwam przedmioty *a, b, c* i *d* do rubryki „1 kłamstwo”:

Tvoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie		<i>a, b, c, d</i>		
Tak	<i>e, f, g, h</i>			

i rozmieszczam po równo (dla każdej kolumny oddzielnie):

0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
<i>e, f</i>	<i>a, b</i>		
<i>g, h</i>	<i>c, d</i>		

Pytam znów: „Czy wybrany przedmiot jest w górnej połówce?”. Przyszła ci ochota, żeby tym razem nie skłamać, i odpowiedziałeś zgodnie z prawdą „nie”. Przesuwam „górne” przedmioty o jedno oczko dalej:

Tvoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie		<i>e, f</i>	<i>a, b</i>	
Tak	<i>g, h</i>	<i>c, d</i>		

Dzielię po równo:

0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
g	e, f	a	
h	c, d	b	

Pytam dalej: „Czy przedmiot jest w górnym rzędzie?”. Założmy, że znów mówisz prawdę, a więc „nie”. Tabela zmienia się na:

Twoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie		g	e, f	a
Tak	h	c, d	b	

„Najwyższy czas skłamać” — pomyślałeś i na czwarte pytanie: „Czy przedmiot jest w górnej połowie?” — odpowiedziałeś „tak”, choć jest on właśnie w dolnej. Przypominam, że chodzi o cukierek c . Nic ci to nie pomoże, tabela prawdę powie. Oto bowiem jak wygląda ona po czwartej odpowiedzi:

Twoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie		g	e, f	a, b
Tak		h	c, d	

Na razie wiem tylko, że nie wybrałeś agrałki i bibułki. Zadaję to samo pytanie, a ty musisz już teraz mówić prawdę. Oczywiście ja nie wiem, że wyczerpałeś już limit kłamstw. Twoja piąta odpowiedź musi brzmieć „nie” i tabela zmieni się wtedy na taką:

Twoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie			g	a, b, e, f
Tak		h	c, d	

Po odpowiedzi na szóste pytanie (musisz na nie odpowiedzieć „nie”) mamy:

Twoja odpowiedź	0 kłamstw	1 kłamstwo	2 kłamstwa	Na pewno nie ten
Nie			c	a, b, e, f, g
Tak		h	d	

Dokończ sam zgadywanie. Zobaczysz, że w ostatniej kolumnie znajdują się wszystkie przedmioty oprócz c (cukierka). Sherlock Holmes mawiał: „Jeżeli wykluczymy to, co niemożliwe, to, co pozostaje, choć nieprawdopodobne, musi być prawdą”.

Przekazujemy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.



GDAŃSKIE WYDAWNICTWO
OŚWIATOWE

www.gko.pl