



O nauczaniu matematyki

Michał Szurek

tom 5

Trójmian
kwadratowy

Liczby
w kulturze

Michał Szurek

O nauczaniu matematyki

Wykłady
dla nauczycieli
i studentów

tom 5

Projekt graficzny, okładka: *Rafał Szczawiński, Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc, Jerzy Trzeciak*

Korekta techniczna: *Jacek Foromański*

Korekta językowa: *Aleksandra Golecka-Mazur*

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-395-1

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59

tel./fax 0 801 643 917, fax 0 58 340 63 61

tel. 0 58 340 63 60, 0 58 340 63 63

<http://www.gwo.pl> e-mail: gwo@gwo.pl

Spis treści

Wykład 10. Trójmian kwadratowy

Najważniejsza funkcja w szkolnej matematyce	7
Układ materiału	8
Parabola jest ciekawą krzywą	9
Przekroje stożka	14
Zmiany w programach nauczania	15
Jak rozwiązujemy równanie kwadratowe?	16
Podstawienie Cardana	18
Praktyczne rady	19
Arabski sposób rozwiązywania równań kwadratowych	19
Zawieszenie niewiary	21
Wzory Viète'a	23
Średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna	24
Chaos na lekcji	28
O podobieństwie parabol	32
Styczna do wykresu	34
Na jakiej krzywej leżą wierzchołki pęku parabol?	37
Równania z parametrem	38
Zadania z zakurzonych książek	44
Propozycja nietypowej i niełatwej lekcji o równaniach kwadratowych	48
Graficzne rozwiązywanie równań kwadratowych	49
Przypomnienie złotego podziału odcinka	51
Niewymierności kwadratowe	52
Gdzie mieszkają wielomiany?	53
Heptakaidecagon	54
Zadanie na 1 kwietnia	58
Zadania powtórzeniowe	59

Wykład 11. Liczby w kulturze

Liczby	65
Zero, jeden, dwa	66
Trzy	72
Cztery	73
Pięć	76
Sześć	77
Siedem	78
Osiem	80
Dziewięć	81
Dziesięć	82
Inne liczby	85
<i>Autor tej książki jak Julian Tuwim</i>	89
Zadania powtórzeniowe	90
 Skorowidz osobowy	 91
Skorowidz rzeczowy	93

Praktyczne rady

Oto kilka obserwacji, które pomagają w pracy z równaniami kwadratowymi:

- Staraj się pracować zawsze z równaniem, w którym współczynnik przy x jest dodatni. Pamiętaj tylko, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$ jest równoważne równaniu $-ax^2 - bx - c = 0$, ale funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ nie jest tożsama z funkcją daną wzorem $g(x) = -ax^2 - bx - c$.
- Jeżeli równanie postaci $x^2 + px + q = 0$ ma współczynniki całkowite i wyróżnik jest pełnym kwadratem liczby całkowitej, to pierwiastki też są całkowite. Istotnie, przy tym założeniu liczby p i $\sqrt{p^2 - 4q}$ są liczbami całkowitymi tej samej parzystości, a zatem pierwiastki są całkowite.
- Jeżeli *delta* jest liczbą ujemną, to równanie nie ma pierwiastków, ale funkcja istnieje. Chodzi o to, że czasami uczniowie w zadaniu typu: „Zbadaj przebieg zmienności funkcji określonej wzorem $h(x) = x^2 + x + 2$ ” obliczają wyróżnik i po stwierdzeniu, że jest on ujemny, kończą pracę, „bo jak delta jest ujemna, to już koniec rozwiązania”. Tymczasem *ujemna delta to twój przyjaciel, a nie wróg!*
- Ze wzoru na pierwiastki równania postaci $x^2 + px + q = 0$ wynika, że w tym przypadku $\sqrt{\Delta} = |x_1 - x_2|$, a zatem jest to długość odcinka między pierwiastkami równania. Nauczyciel może to wykorzystać do szybkiego wymyślania równań do rozwiązania albo do kontroli pracy ucznia. Jeśli na przykład, zapomni kartki z przygotowanymi zadaniami, nie ma też podręcznika ani tablic, a musi natychmiast wymyślić równanie do rozwiązania. Wybiera wówczas sobie dwa pierwiastki, ze wzorów Viète'a oblicza w pamięci współczynniki, a z tej zasady wie natychmiast, jaka ma być delta.
- Oto przepis na równanie o wyróżniku $\Delta = 25$. Jest nim na przykład każde równanie postaci $x^2 + (2k + 1)x + (k - 2)(k + 3) = 0$, ewentualnie postaci $x^2 - (2k + 1)x + (k - 2)(k + 3) = 0$. To są ciekawe motywy zadań.

Arabski sposób rozwiązywania równań kwadratowych

Przy napiętym programie nauczania ten średniowieczny sposób rozwiązywania równań kwadratowych może nie zmieścić nam się na lekcji. Warto jednak wygospodarować trochę czasu i zapoznać z nim uczniów, szczególnie w klasach o profilu humanistycznym.

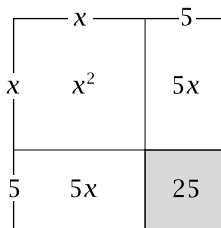
Abdullah Muhammed ibn Muza Al-Chorezmi al-Magusi (ok. 783–850) był znanym uczonym. To od jego nazwiska pochodzi słowo algorytm. W swoim traktacie *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-dżabr wa-l-mukabala* — z deformacji

przedostatniego słowa tytułu wzięła się nazwa „algebra” — podała interesującą klasyfikację równań:

1. Kwadraty równe pierwiastkom: $ax^2 = bx$.
2. Kwadraty równe liczbie: $ax^2 = c$.
3. Pierwiastki równe liczbie: $bx = c$.
4. Kwadraty i pierwiastki równe liczbie: $ax^2 + bx = c$.
5. Kwadraty i liczby równe pierwiastkom: $ax^2 + c = bx$.
6. Pierwiastki i liczby równe kwadratam: $bx + c = ax^2$.

Każdy z tych typów umiał rozwiązać.

Zaczniemy od równania $x^2 + 10x = 39$. Kreślimy (albo tylko wyobrażamy sobie!) kwadrat. Długość jego boku jest naszą niewiadomą x . Do tego kwadratu dorysowujemy prostokąty, których dłuższe boki są równe połowie współczynnika przy x , to jest 5. Figurę o kształcie litery Γ , utworzoną z kwadratu i dwóch dobudowanych prostokątów, starożytni Grecy nazywali *gnomonem*. Taki *gnomon* ma pole $x^2 + 2 \cdot 5x = x^2 + 10x$. Równanie, które mamy rozwiązać, narzuca warunek, że pole to jest równe 39. Jeżeli jednak ów *gnomon* dopełnimy do kwadratu, to otrzymamy „duży kwadrat” o boku $x + 5$.



Pole „dużego” kwadratu jest równe $39 + 5^2 = 64$, a to znaczy, że $(x + 5)^2 = 64$, skąd $x + 5 = 8$. Opuszczamy tu nieznane we wczesnym średniowieczu rozwiązanie ujemne. Z równania $x + 5 = 8$ wyznaczamy ostatecznie $x = 3$.

Zaryzykuję tu tezę, że sposób ten jest nie gorszy niż ten, którego od czasów Oświecenia uczymy w szkołach, i równie dobrze pokolenia uczniów mogłyby nie słyszeć o delcie! Zobaczmy najpierw, że sposób arabski jest prostszy rachunkowo! Porównajmy. Rozpatrzmy równanie $x^2 + 8x - 153 = 0$. Sposób tradycyjny wymaga obliczenia $\Delta = 8^2 + 4 \cdot 153 = 676$. Musimy teraz wyciągać pierwiastek z dość dużej liczby 676. Ile to jest..., chwileczkę, gdzie mój kalkulator... aha, już wiem, to 26, więc obliczamy:

$$x_1 = \frac{-8 - 26}{2} = \frac{-34}{2} = -17, \quad x_2 = \frac{-8 + 26}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

W sposobie arabskim wiemy, że trzeba dobudować prostokąty o boku 4 i że „duży” kwadrat będzie miał pole $4^2 + 153 = 169$. Zatem $x + 4 = 13$ albo $x + 4 = -13$, czyli $x = 9$ albo $x = -17$. Szybciej, mniejsze liczby i prawie bez rachunków.

Pięć

Nie tylko koń, co ma cztery nogi, się potknie: o człowieku niezręcznym i niemądrym powiemy (prawda, że trochę nieładnie), że to takie cztery litery, a w ogóle to brak mu piątej klepki. Taki rzadko bywa kuty na cztery nogi i na pewno nie zna niczego jak swoje pięć palców.

Nie plećmy piąte przez dziesiąte, a jeśli coś robimy, to starannie, nie zaś ni w pięć ni w dziewięć. Uważajmy, żebyśmy nie byli potrzebni jak piąte koło u wozu.

W matematyce liczba 5 występuje w wielu ciekawych twierdzeniach. Jest tylko pięć wielościanów foremnych (platońskich), czyli takich, które mają jednakowe foremne ściany, zbiegające się w każdym wierzchołku w tej samej liczbie. Wiązano je z żywiołami: czworościan z ogniem, sześcian z ziemią, ośmiościan z powietrzem, dwudziestościan z wodą. Ostatni odkryty wielościan foremny — dwunastościan — wiązano z harmonią Wszechświata.

Każda elipsa i każda hiperbola jest wyznaczona przez pięć punktów. Nie istnieją wzory na pierwiastki dowolnego równania piątego stopnia i to odkrycie (1824, Niels Henrik Abel, wcześniejszy dowód Ruffiniego był niezrozumiany przez współczesnych) dało początek nowoczesnej, bardzo „zalgabraizowanej”... algebrze.

Pitagorejczycy nazywali 5 liczbą małżeńską, bo jest sumą pierwszej liczby żeńskiej 2 i pierwszej męskiej 3. Liczby miały bowiem swój rodzaj: parzyste żeński, nieparzyste męski, z wyjątkiem nijakiej jedynki.

Pitagoras bowiem nazywał liczbę pięć liczbą godową, liczbą spełnionych zaślubin i małżeństwa, dla tej przyczyny, iż jest złożona z *tryas*, która jest pierwszą liczbą nieparzystą i niepodzielną, i *dyas*, która jest pierwszą liczbą parzystą — jakoby mąż i niewiasta spleceni razem. Jakoż w istocie, w starożytnym Rzymie zapalano w dzień zaślubin pięć woskowych pochodni i nie wolno było zapalać więcej, choćby na ślubie najbogatszych. Co więcej, za dawnych czasów poganie wzywali pięciu bogów, albo raczej jednego boga w pięciu łaskach, dla tych, którzy się zaślubiali: Jowisza weselnego, Junonę, przodownicę świętą, Wenerę piękną, Pythonę, boginię namowy i pięknych słówek i Dianę na pomoc w pracy rodzenia.

François Rabelais, *Gargantua i Pantagruel*,
przekł. Tadeusz Boy-Żeleński

Pięć darów umysłu: zdrowy rozum,
wyobraźnia, fantazja, abstrakcja, pamięć.

Stephen Hawes, 1515

Sześć

Liczba sześć jest w mądrości ludowej dość duża: „gdzie kucharek sześć, tam nie ma co jeść”. W czasach starożytnych symbolizowała równowagę i harmonię, wyrażaną przez dwa trójkąty złożone podstawami. Jest liczbą doskonałą. Święty Augustyn pisze¹⁹: „To ze względu na doskonałość liczby sześć całość stworzenia dokonana została, jak opowiada Pismo Święte, przez sześciokrotne powtórzenie tego samego dnia, czyli w przeciągu sześciu dni. Wszak liczba ta jest pierwszą liczbą, która stanowi sumę swoich części, to jest sumę szóstej części, trzeciej części i połowy, czyli sumą jedynki, dwójki i trójki, które po dodaniu tworzą właśnie sześć”.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$$

Liczby doskonałe to liczby, które są równe sumie swoich dzielników właściwych, to znaczy dzielników mniejszych od nich:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

...

$$14474011154664524427946373126085988481573677491474835889066354349131199152128 = 2^{126} \cdot 170141183460469231731687303715884105727$$

...

Ta ostatnia z wymienionych liczb jest największą liczbą doskonałą znaną bez pomocy komputera.

Parzyste liczby doskonałe muszą mieć postać $2^n(2^{n+1} - 1)$, przy czym $2^{n+1} - 1$ musi być liczbą pierwszą (takie liczby pierwsze nazywają się liczbami Mersenne'a), w powyższych przykładach mamy $n = 1, 2, 4, 6$. Nie wiadomo, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała. Próby jej znalezienia się nie powiodły i wykazano, że jeżeli istnieje, to musi być... bardzo duża. Ale dowodu ogólnego nie ma.

W prawie wszystkich kulturach przyjęło się noszenie pierścionka na serdecznym palcu i nawet to może mieć związek z doskonałością liczby 6. Otóż w starożytnym Egipcie wyobrażeniem liczby 6 była ręka z zagiętym tym właśnie palcem, a ponieważ szóstka jest doskonała, ten palec był najbardziej honorowy. Można wierzyć w to wy tłumaczenie, można nie wierzyć, tak jak w całą pozostałą symbolikę liczb.

¹⁹ Święty Augustyn, *O państwie Bożym. Przeciw poganom ksiąg XXII*, tłum. Wiktor Kornatowski, Warszawa 1977.

Jedna muszka, jedno jabłko
 i kreseczka jedna
 Ta cyferka, moje dziecię
 zawsze taka biedna.
 Tu dwie muszki, dwa jabłuszka
 i kreski dwie stoją.
 Już im rażniej, już się one
 nie każdego boją.
 Trzy jabłuszka i trzy muszki,
 a kresczek ile?
 Pewnie wiesz, dziecino moja,
 pomyśl tylko chwilę.
 Cztery kreski, cztery jabłka
 i muszek do pary.
 Jak mi dzieci nie policzą,
 Powiem, że niezdary!
 Tu pięć kresek i pięć jabłek,
 Tylko much nie liczę.
 Bo nie darmo wszak w liczeniu
 Główki wasze ćwiczę.
 Sześć much przyszło do jabłuszek.
 Kreski równo stoją.
 Choć ich sześć jest, ale grzeczne.
 Jak dzieci nie broją!

Kto policzy te obrazki?
 Wydawnictwo M. Arcta, 1928

Siedem

Nie wszędzie siedem jest szczęśliwą liczbą. Siódemka nie symbolizuje pomyślności na przykład w Japonii, z której pochodził Kiichiro Toyoda, założyciel koncernu Toyota. Dlaczego literę *d* w jego nazwisku zastąpiono w nazwie firmy przez *t*? Właśnie z powodów symbolicznych. Słowo *Toyoda* w japońskiej pisowni jest wyrażane siedmioma znakami, a *Toyota* — już ośmioma. W kraju Kwitnącej Wiśni to liczba osiem jest uważana za szczęśliwą. I właśnie dlatego niektórzy z nas jeżdżą Toyotą, a nie Toyodą.

Znękany swoją sławą niesłychaną,
 W tych całych ichnich Zjednoczonych Stanach,
 w ideologii wstrętnej i nam złej,
 żył Hollywoodu gwiazdor numer jeden,
 tak zwany agent 007,
 czyli James Bond, szpieg FBI i CIA.
 (...)

Włodzimierz Wysocki, *Agent 007*,
 przekł. Michał B. Jagiełło

Przekazujemy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.



GDZAŃSKIE WYDAWNICTWO
OŚWIATOWE

www.gwo.pl