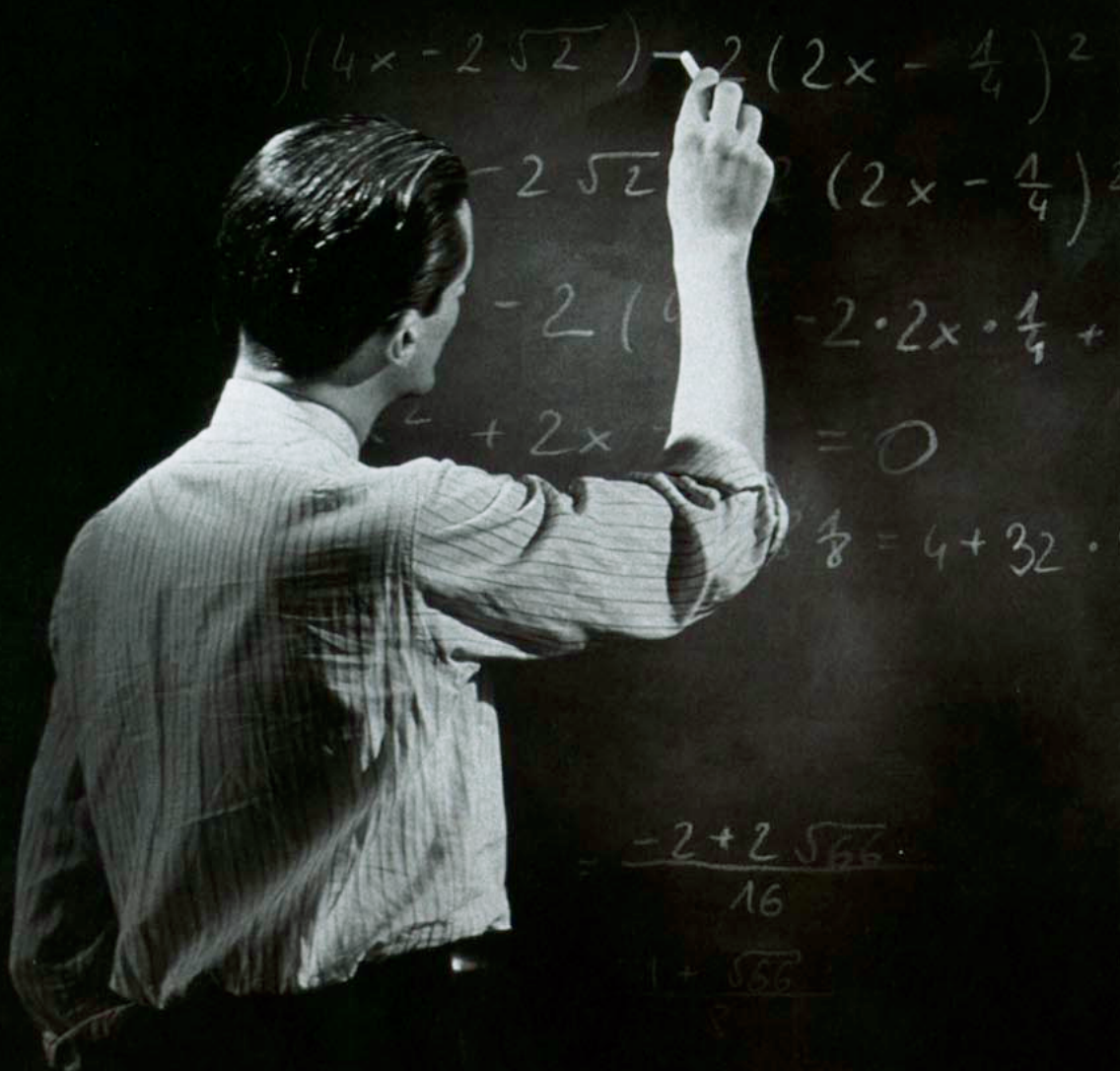




O nauczaniu matematyki

Michał Szurek

tom 1

Uczę świadomie,
a więc lepiej i ciekawiej

Dodawanie
i odejmowanie

Mnożenie
i dzielenie

Michał Szurek

O nauczaniu matematyki

Wykłady
dla nauczycieli
i studentów

tom **1**

Projekt graficzny, okładka: *Rafał Szczawiński, Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc, Jerzy Trzeciak*

Korekta techniczna: *Jacek Foromański*

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-391-3

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2005

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59

tel./fax 0 801 643 917, fax (58) 340 63 61

tel. (58) 340 63 60, 340 63 63

<http://www.gwo.pl> e-mail: gwo@gwo.pl

Spis tematów wszystkich wykładów

Tom 1.

Wykład 1. Uczę świadomie, a więc lepiej i ciekawiej

Wykład 2. Dodawanie i odejmowanie

Wykład 3. Mnożenie i dzielenie

Tom 2.

Wykład 4. Po co uczę matematyki?

Wykład 5. Światy liczbowe

Tom 3.

Wykład 6. Zasady dydaktyczne, metody, sposoby i formy nauczania

Wykład 7. Starzy znajomi

Tom 4.

Wykład 8. Jak się uczyć?

Wykład 9. Logika

Tom 5.

Wykład 10. Trójmian kwadratowy

Wykład 11. Liczby w kulturze

Tom 6.

Wykład 12. Jak badać efekty naszej pracy, czyli o ocenianiu

Tom 7.

Wykład 13. Pieniądze

Wykład 14. Statystyka opisowa

Tom 8.

Wykład 15. Geometria

Wykład 16. Matematyka z oddali

Wykład 17. XXI wiek

Spis treści tomu 1

Wykład 1. Uczę świadomie, a więc lepiej i ciekawiej

Sztuka nauczania matematyki	7
Co to jest matematyka?	11
Co to jest szkoła?	14
Co to jest uniwersytet?	17
Co to jest dydaktyka?	22
O paradygmatach matematyki	23
Nicolas Bourbaki	25
Wiedza jako algorytm i jako metafora	27
Kultura	28
Społeczna rola wykształcenia w naukach ścisłych	34
Przypowieść o Indianinie, który nie rozumiał, że papier może mówić	36
Dla kogo jest ta książka?	36
Zadania powtórzeniowe	38

Wykład 2. Dodawanie i odejmowanie

Jak i co dodajemy?	43
Najtrudniejsza bariera epistemologiczna	46
Trudności	47
Reguły usprawniające	49
Jak przeprowadzić interesującą lekcję z dodawania jedynek?	52
Szereg harmoniczny dla gimnazjalistów	54
Dodawanie liczb porządkowych	56
Grafy	57
Odejmowanie	58
Dwie drogi odejmowania	60
Uwaga o kolejności działań	62
Odejmowanie przy obliczeniach logarytmicznych	62
Zadania powtórzeniowe	63

Wykład 3. Mnożenie i dzielenie

Wprowadzanie mnożenia	67
Przemienność... i nieprzemienność mnożenia	71
Różne sposoby wykonywania mnożenia	74
Proste jest piękne	84
Potęgowanie	87
Problemy z pozoru błahe, ale przykre jak ból zęba	88
Czy arytmetyka elementarna jeszcze się rozwija?	91
Dzielenie	92
Liczby wymierne	97
Ułamki proste	104
Ciekawe, nietypowe i nie zawsze łatwe zadania na ułamki	105
Zadania powtórzeniowe	112
 Skorowidz osobowy	 115
Skorowidz rzeczowy	117

Nicolas Bourbaki

W 1949 roku, w wystąpieniu jednego z bourbakistów, przedstawiającym logiczne i teoriomnogościowe podstawy, na których zamierzają oprzeć swój traktat, czytamy: „Stwierdzam, że na tych podstawach mogę zbudować całość dzisiejszej matematyki; jeśli jest zaś coś oryginalnego w moim postępowaniu, to leży ono jedynie w tej okoliczności, że zamiast zadowolić się takim stwierdzeniem, przystępuję do udowodnienia tego w taki sam sposób, w jaki Diogenes dowiódł istnienia ruchu; a dowód mój będzie się stawał coraz kompletniejszy w miarę, jak mój traktat będzie się rozrastał”²⁴.

„Nicolas Bourbaki” to zbiorowy pseudonim grupy matematyków francuskich, założonej około 1935 roku. Postawili oni sobie za cel przede wszystkim dążenie do rozpatrywania zagadnień ogólnych, do szukania uogólnień, „wspólnych mianowników” różnych własności, twierdzeń i teorii. Sformalizowali i podnieśli do rangi ogólnej zasady to, co dla każdego matematyka jest naturalne. Stefan Banach powiedział, że dobry matematyk widzi analogie między twierdzeniami, bardzo dobry — analogie między dowodami, znakomity — analogie między teoriami, a genialny dostrzega analogie między analogiami. Dlatego jedną z zasad dydaktycznych (omówione zostaną w jednym z późniejszych wykładów) nazwałem *Czy umiecie się dziwić* — od tytułu książki wydanej w 1976 roku, opartej na artykułach z „Deltą”. Książka ta swoją treścią zachęcała do poszukiwań intelektualnych.

O działalności Bourbakiego można przeczytać na przykład w książkach polecanych w zadaniu powtórzeniowym 1.3 na końcu tego wykładu. Oczywiście na hasło „Nicolas Bourbaki” otwierają się w wyszukiwarce internetowej dziesiątki tysięcy stron²⁵. Podam tu jeden przykład bardzo ogólnego spojrzenia na zagadnienie matematyczne.

Wszyscy wiemy, że funkcją różnowartościową $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcję, która przybiera różne wartości dla różnych argumentów swojej dziedziny. Mówimy natomiast o funkcji, że przekształca dziedzinę X na zbiór Y , jeżeli każdy punkt przeciwdziedziny Y jest obrazem pewnego punktu $x \in X$. W tych działach matematyki, które mają stosunkowo dużo wspólnego z algebrą, funkcję różnowartościową nazywamy *monomorfizmem*, a funkcję „na” — *epimorfizmem*.

Pozostawiam czytelnikowi udowodnienie prostych własności podanych w ćwiczeniu na następnej stronie.

²⁴ Nicolas Bourbaki, *Foundations of mathematics for the working mathematician*, „The Journal of Symbolic Logic”, nr 14/1949, s. 1-8.

²⁵ Polecam szczególnie wspomnienia jednego z bourbakistów, Armanda Borela, zatytułowane *Twenty five years with Nicolas Bourbaki*.

Ćwiczenie 1.2. Wykaż, że:

- a) funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru T i dla każdych dwóch funkcji $g_1: T \rightarrow X$, $g_2: T \rightarrow X$, takich, że $f \circ g_1 = f \circ g_2$, mamy $g_1 = g_2$,
- b) funkcja $f: X \rightarrow Y$ przekształca dziedzinę X na zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru Z i dla każdych dwóch funkcji $h_1: Y \rightarrow Z$, $h_2: Y \rightarrow Z$ takich, że $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, mamy $h_1 = h_2$.

Można to skrótowo ująć tak: przez monomorfizm możemy skracać, gdy jest napisany z lewej strony, przez epimorfizm — gdy jest napisany z prawej. Zwróćmy uwagę, że we własnościach tych, charakteryzujących dwa najważniejsze typy funkcji, nie występuje pojęcie elementu, a tylko równość funkcji i algebraiczna operacja składania funkcji.

Możemy teraz skorzystać z takiego formalizmu i opisać tym samym językiem wiele innych sytuacji. Wiemy, że funkcję możemy zaznaczyć strzałką, i odwrotnie, każda strzałka sugeruje jakieś działanie, przyporządkowanie, ruch. Ale strzałkami możemy zaznaczać wiele innych zależności. Na przykład strzałka od A do B może oznaczać, że element A jest „mniejszy”, „wcześniejszy” niż B , „zależny” od B , „mniej ogólny” niż B . Może być również dokładnie odwrotnie: strzałkę stawiamy od „większego” do „mniejszego”, od „późniejszego” do „wcześniejszego”, od „ogólnego” do „szczegółowego”. Nie wchodząc w dokładne określenie porządku częściowego w teorii mnogości, podam kilka sugestywnych przykładów.

Porządek w zbiorze liczb naturalnych wyznaczony przez relację podzielności: liczba A jest wcześniejsza od liczby B , gdy jest jej dzielnikiem.

Porządek w rodzinie podzbiorów ustalonego zbioru: podzbiór A jest „wcześniejszy” od podzbioru B , gdy jest w nim zawarty.

Porządek w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych określony przez zwykłą relację mniejszości.

Przyjrzyjmy się, w każdym z tych przykładów, znaczeniu słów „najpóźniejszy element, wcześniejszy zarówno od A , jak i od B ”. W pierwszym przykładzie jest to największy wspólny dzielnik liczb A i B . W drugim to część wspólna danych dwóch podzbiorów. W trzecim to po prostu mniejsza z dwóch danych liczb A , B . Natomiast „najwcześniejszy element, późniejszy zarówno od A , jak i od B ” to w pierwszym przykładzie najmniejsza wspólna wielokrotność A , B , w drugim suma danych dwóch podzbiorów, a w trzecim to po prostu większa z liczb A , B . Widzimy, jak trzy z pozoru różne pojęcia są w gruncie rzeczy specjalizacją jednego, bardziej ogólnego pojęcia, związanego z ogólną koncepcją porządku. Właśnie dążenie do ujmowania zagadnień w jak najpełniejszej ogólności jest najważniejszą cechą ujęcia matematyki w duchu Bourbakiego.

Jak i co dodajemy?

*Cząstka pracy wykonana
I znów cząstka, i znów cząstka.
I znów wieczór, i od rana
Do cząstki dodana cząstka.*

Konstanty Ildefons Gałczyński,
fragment *Pieśni VI*

W języku potocznym *dodać* to mniej więcej tyle co *przyłączyć*, *dostawić*, *uzupełnić*³⁶. Do pociągu dodano jeszcze jeden wagon, gospodyni domowa dodała sól do zupy, w dyskusji używamy zwrotu „no tak, a na dodatek...”, nauczyciel dodaje do pracy domowej jeszcze jedno zadanie. Gdy dzieci słyszą w szkole o dodawaniu liczb, już posługują się tym słowem w jego codziennym znaczeniu. Pojęcie dodawania nie może być — psychologicznie — zdefiniowane. Nie można go bowiem wyrazić za pomocą terminów prostszych. Zebrać, skupić, dołączyć — wyrażają to samo.

W nauczaniu arytmetyki dodawanie występuje w dwóch znaczeniach: jako *zliczanie* — gdy idzie o sumę (na przykład $5 + 4$: jeśli do 5 dołożę 4, to ile otrzymam?) oraz jako *dopełnianie* jednej liczby drugą (na przykład $6 + ? = 10$: ile trzeba dodać do 6, by otrzymać 10?). W każdym z tych znaczeń dodawanie jest najłatwiejszym działaniem arytmetycznym, bardzo dobrze osadzonym w konkretach.

W nauczaniu początkowym nową liczbę wprowadzamy jako rezultat dołączenia jedności do liczby poprzedniej. Nie wdajemy się w zawile wywody o różnicy między liczbą kardynalną a liczbą porządkową, ani tym bardziej w nieprzebieżność dodawania typów porządkowych, choć przecież każdy się zgodzi, że dołączenie szeregu *A* ludzi do szeregu *B* jest czym innym niż dołączenie *B* do *A* — różnica polega na tym, kto stoi na początku, a kto na końcu!



³⁶ Pierwszą książką matematyczną pisaną po polsku był podręcznik księdza Tomasza Kłosa *Algoritmus, to jest nauka liczby*, wydany w 1538 roku w Krakowie. Czytamy tam, że „Liczba jest nauka barzo zacna y pożyteczna”. W ustawie o Komisji Edukacji Narodowej (1773) mamy zaś: „Arytmetyka jest to dusza wszelkiego rządu w życiu towarzyskiem”.

Ćwiczenie 2.1. Oblicz sumę $4 + 247$. Innymi słowy: do liczby 4 dodaj 247. Jaki wynik otrzymałeś? 251? Bardzo dobrze. A teraz zastanów się, jak to obliczyłeś. Na pewno odwrotnie: do 247 dodałeś 4, prawda? To jedna z pierwszych zasad arytmetyki, ważna w nauczaniu początkowym: psychologicznie dodawanie nie jest przemienne. 4 dodać 247 to nie to samo, co 247 dodać 4. Każdy nauczyciel musi o tym pamiętać, każdy podręcznik musi to uwzględniać. Zresztą, można by zaprotestować, że jeśli do 4 misiów dołączymy 247, to nie jest to żadne dodawanie. Do 247 misiów można dodać 4, ale nie na odwrót.

B. R. Buckingham podaje, że w pewnych badaniach spośród 1154 uczniów źle obliczyło sumę $2 + 6$ aż 139 uczniów, a sumę $6 + 2$ tylko 20 uczniów.

Dodawanie jest za to łączne i jest to bardzo intuicyjne; dlatego nad łącznością dodawania i mnożenia nie warto się dłużej zatrzymywać.

Ćwiczenie 2.2. Oblicz $2007 + 12$. Na pewno obliczysz najpierw $7 + 12$. Otrzymasz 19 i dopiero potem uświadomisz sobie, że owo 19 to „nadwyżka” ponad 2000. Zastanów się nad tym swoim procesem myślowym.

Ćwiczenie 2.3. Oblicz w pamięci $45 + 38$. A teraz zrekonstruuj swój proces myślowy. Zapewne do 45 dodałeś najpierw 30, a potem 8. Natomiast gdy ani w rzędzie jedności, ani dziesiątek nie przekraczamy progu dziesiątkowego, można dodawać oddzielnie dziesiątki do dziesiątek, a jedności do jedności: $45 + 23 = (4 + 2) + (5 + 3) = 68$. Jeśli tak robisz, to postępujesz zgodnie z zasadami racjonalnego dodawania w pamięci. Wykonaj teraz dodawanie pisemne. Zwróć uwagę, że tym razem zaczynasz od jedności, a także, że choć liczby piszemy od lewej do prawej, to dodawanie pisemne zaczynamy od prawej strony. Nie zwracasz na to już uwagi, bo masz to dobrze opanowane. Ale co ma o tym myśleć dziecko, dla którego wszystko jest nowe?

4 + 5 Wieß das wyß
4 — 17 sen oder deßgley
3 + 30 chen/So sumier
4 — 19 die zentner vnd
3 + 44 lb vnnnd was auß
3 + 22 — ist/das ist mi
zentner 3 — 1 lb nus dz sen beson
3 + 50 der vnnnd werden
4 — 16 4 5 3 9 lb (So
3 + 44 du die zentner
3 + 29 3 lb gemachete
3 — 12 haß vnnnd das /
3 + 9 + das ist meer
darß 2 ddiereß vnd > 5 minus. Nun
solc du für Holz abschlahen allweeg für
ein legel 24 lb. Vnd das ist 1 3 mal 24.
vnd mache 3 1 2 lb darß addier das —
das ist > 5 lb vnd werden 3 8 >. Dyeuß
trahier von 4 5 3 9. Vnd bleyben 4 1 5 2

Znak + jako skrót łacińskiego *et* i znak – (minus) zostały po raz pierwszy użyte w druku w podręczniku arytmetyki handlowej *Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft* Johanesa Widmanna (Lipsk 1489). Znaki te nie oznaczały jeszcze działań arytmetycznych jako takich, tylko nadwyżkę wagi i niedowagę worków ze zbożem — 4 centnary plus 5 funtów oznaczało, że worek, który powinien ważyć 4 centnary, ważył o 5 funtów więcej.

Jednym zaś z najstarszych zabytków piśmiennictwa staropolskiego są codzienne rachunki dworu Władysława Jagiełły: za kaszę jaglaną tyle a tyle, rodzynki z Włoch tyle a tyle...³⁷

Historia z obliczaniem dwa razy dwa jest tematem wciąż żywej anegdotki na wydziale matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego. W końcu lat pięćdziesiątych na szóste piętro Pałacu Kultury wprowadził się „mózg elektronowy”. Możliwościami maszyny zainteresował się dyrektor Instytutu Matematyki, mieszczącego się trzy piętra wyżej. Przyszedł, założył obowiązkowe kapcie, obejrzał z zainteresowaniem owe kilkanaście szaf, połączonych przewodami. „Czy toto umie pomnożyć dwa przez dwa?” — zapytał. „Ależ oczywiście, panie dyrektorze” — odparł operator — „zaraz to zrobię” — i zaczął manipulować wtyczkami. Dyrektor czekał cierpliwie, operatorowi trzęsły się ręce ze zdenerwowania i zamiast stuku drukarki, wypływającej wynik na taśmie perforowanej słychać było tylko jakieś brzęczenie. „Interesujące, dziękuję” — powiedział dyrektor i wyszedł. W tym momencie komputer ruszył. Zahuczało, zaszumiało i po kilku sekundach z odpowiedniego urządzenia wysunął się podziurkowany kawałek taśmy. Operator rzucił nań okiem, wprawnym okiem odczytał kod dziurkowy i pognął za dyrektorem, krzycząc: — „Jest, panie dyrektorze, jest! Proszę spojrzeć: cztery!”.

Autentyczność tego zdarzenia budzi pewne wątpliwości. *Si non e vero, e ben trovato*. Jeśli to nawet nie jest prawdziwe, to jednak dobrze wymyślone.

Łatwiej jest dodawać niż mnożyć. Już w XVII wieku wiedziano, że:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

a zatem mnożenie da się zastąpić przez prostsze dodawanie i łatwiejsze do stabilizowania podnoszenie do kwadratu i dzielenie przez jedną tylko liczbę 4. Wydawano więc duże tablice ćwiartek kwadratów liczb: aby pomnożyć dwie liczby, należało obliczyć ich sumę i różnicę, znaleźć w tablicach ćwiartki kwadratów tej sumy i różnicy, a następnie odjąć wyniki. Przy dużych liczbach dawało to pewną oszczędność czasu. Dopiero logarytmy zmieniły życie uczonych XVIII wieku nie mniej niż komputery w naszych czasach.

Nie zgadzam się z matematyką. Uważam, że suma zer daje groźną liczbę.

Stanisław Jerzy Lec, *Myśli nieuczesane*

Cztery działania arytmetyczne: podawanie, obejmowanie, mrożenie i gdzieś-lenie.

Lewis Carroll, *Alicja w Krainie Czarów*,
przekł. A. Marianowicz

³⁷ *Rachunki dworu króla Władysława Jagiełły i królowej Jadwigi z lat 1388 do 1420*, oprac. F. Piekosiński, Kraków 1896. Fragmenty są przytoczone w zbiorze: Wiesław Wydra, Wojciech Ryszard Rzepka, *Chrestomatia staropolska, teksty do roku 1453*, Ossolineum, Wrocław 1995.

Ćwiczenie 3.8. Oblicz w ten sposób 1234^2 , 111111^2 , 100000^2 .

Z interesujących trików, które kiedyś mogły ułatwiać uczniom mnożenie, omówimy mnożenie na palcach. Prawdę mówiąc, trudno sobie wyobrazić, że kiedykolwiek było to rzeczywiste ułatwienie. Rzecz zasługuje jednak na uwagę i może służyć jako bardzo ciekawe ubarwienie lekcji.

Pierwsza z reguł ma zastosowanie do liczb jednocyfrowych większych niż 5. Zakładamy, że mnożenie aż do pięć razy pięć mamy opanowane. Jeśli chcemy obliczyć, ile jest siedem razy osiem, to u każdej ręki wystawiamy tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5. Pozostałe palce zginamy. Następnie dodajemy palce wystawione (to będzie cyfra dziesiątek iloczynu). Puryści zaprotestują przeciwko „dodawaniu palców” i każą być może mówić, że dodajemy *liczby* palców wystawionych. Nie zwracając na nich uwagi, mnożymy palce zgięte (i jest to cyfra jedności iloczynu). Na przykład, dla obliczenia, ile jest siedem razy osiem, wystawiamy w lewej ręce trzy palce (dwa zostają zagięte), w prawej dwa (trzy zgięte). Odczytujemy cyfrę dziesiątek: dwa *plus* trzy i cyfrę jedności: dwa *razy* trzy. Wynik mnożenia: 56.

Reguła ta wynika z tożsamości: $ab = 10((a - 5) + (b - 5)) + (10 - a)(10 - b)$.



Inna reguła obowiązuje, gdy mnożymy liczby z przedziału od 11 do 15. Omówimy ją na przykładzie mnożenia 13 razy 14. U każdej ręki wystawiamy „nadwyżkę” ponad 10, a zatem 3 i 4. Następnie dodajemy wystawione palce ($3 + 4 = 7$) i to jest liczba dziesiątek wyniku. Mnożymy te same liczby: $3 \text{ razy } 4 = 12$ i to są jedności wyniku. 12 jedności to 10 i 2. Dopisujemy stały składnik 100. Wynikiem jest $100 + 70 + 12 = 182$.

Dla liczb z przedziału od 15 do 19 postępujemy nieco podobnie jak dla liczb jednocyfrowych. Chcąc pomnożyć 17 przez 19, u każdej ręki wystawiamy tyle palców, o ile czynnik dany jest większy od 15: dwa u lewej ręki, cztery u prawej. Dodajemy wystawione palce i mnożymy je zawsze przez 20: $(2 + 4) \cdot 20 = 120$. Dodajemy iloczyn zagiętych palców i stały składnik 200, otrzymując wynik 323.

Chcąc pomnożyć 8 przez 12 „na palcach”, wprowadzamy „ujemne palce”: wystawiamy w każdej ręce tyle palców, o ile dana liczba jest większa od 5. Na jednej z rąk to łatwo: wystawiamy trzy palce. Gorzej jest z drugą. Mamy pięć palców. Ile palców zostanie, gdy wystawimy siedem? „Oczywiście” minus 2. Dodajemy teraz palce wystawione. Jest ich $3 + 7$, a więc 10. Palców zagiętych jest... minus 4. Dziesięć dziesiątek dodać minus cztery daje... 96. Działanie było z pozoru bezsensowne, ale dało dobry wynik. Takie niepokoję miał Törless (por. przypis w wykładzie *Matematyka z oddali*).

Proste jest piękne

Spójrzmy na najzwyklejszą tabliczkę mnożenia.

Ćwiczenie 3.9. Utwórz tę tabliczkę za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	256	270	285	300	315	330	345	360	375
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625

Występujące w niej ciekawe zależności można wykorzystać na lekcjach od III klasy szkoły podstawowej do III klasy liceum, i to zarówno na lekcjach matematyki, jak i informatyki⁵⁰. Ograniczę się do obserwacji i pytań, pozostawiając Czytelnikom sformułowanie i udowodnienie ogólnych twierdzeń wynikających z tych obserwacji. W końcu to tylko... tabliczka mnożenia. Dostosowując poziom trudności zadań do wieku uczniów, możemy im niektóre własności podać jako ciekawostkę albo polecić ich znalezienie jako samodzielną pracę badawczą.

- Spójrzmy na kwadraty utworzone z liczb położonych tak jak liczby 72, 144, 108, 216 albo 91, 143, 119, 187 czy też 112, 140, 128, 160 umieszczone w szarych polach. Czy to przypadek, że iloczyn liczby „północnowschodniej” i „południowowschodniej” jest równy iloczynowi liczby „północnozachodniej” i „południowozachodniej”? ($72 \cdot 216 = 144 \cdot 108 = 15\,552$, $91 \cdot 187 = 143 \cdot 119 = 17\,017$, $112 \cdot 160 = 140 \cdot 128 = 17\,920$)? Sformułuj ogólne prawo wynikające stąd i udowodnij je. Co z tego wynika dla iloczynu liczb w ramionach krzyża o końcach ramion 72, 144, 108, 216?
- Spójrz na krzyże, których końce ramion wyznaczają okienka zaznaczone grubą czarną linią. Zauważ, że w nich sumy przeciwległych elementów są równe: $190 + 230 = 168 + 252 = 420$, $170 + 250 = 126 + 294 = 420$. Sformułuj ogólne prawo i udowodnij je.
- Przekonaj się o prawdziwości ogólnych zależności, które sformułowałeś powyżej, za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Na przykład, żeby przekonać się, że w krzyżu o kształcie takim, jaki tworzą liczby 112, 140, 128, 160, odpowiednie iloczyny będą zawsze równe, sprawdź to w jednym przypadku, a następnie wykorzystaj „adresowanie warunkowe”. Zwróć uwagę, że napisałem „przekonaj się o prawdziwości”, a nie „udowodnij”. Czy rozumiesz różnicę?
- Popatrz na romby o wierzchołkach w czarnych polach tabeli. Pierwszy z nich tworzą liczby 96, 90, 136, 133. Porównajmy sumy przeciwległych elementów: $96 + 133 = 229$, $136 + 90 = 226$. Pozornie nic tu ciekawego. Badamy inne romby: $20 + 84 = 104$, $44 + 57 = 101$. Następnie: $252 + 323 = 575$, $272 + 300 = 572$. Sformułuj i udowodnij ogólne prawo, które... już chyba widzisz.
- Średnia arytmetyczna liczb na obwodzie ośmiokąta (utworzonego przez liczby umieszczone w szarych kółkach) jest równa liczbie stojącej w jego „środku symetrii”:

$$\frac{210 + 220 + 230 + 264 + 300 + 325 + 350 + 360 + 368 + 352 + 336 + 300 + 266 + 247 + 228 + 220}{16} = 286$$

Natomiast iloczyny liczb stojących w ukośnych „przeciwległych bokach” ośmiokąta ($228 \cdot 220 \cdot 210 \cdot 368 \cdot 360 \cdot 350$ i $230 \cdot 264 \cdot 300 \cdot 266 \cdot 300 \cdot 336$)

⁵⁰ Dziękuję Jerzemu Kołodziejczykowi za zwrócenie mi uwagi na te właściwości zwykłej tabliczki mnożenia.

Spójrz na iloczyny $1 \cdot 3$, $3 \cdot 7$, $13 \cdot 21$, $10 \cdot 18$, $5 \cdot 11$, $6 \cdot 12$. Co widzisz? Czy zawsze wynik mnożenia sąsiednich liczb z tego samego rzędu poziomego znajdzie się w tym samym rzędzie? Popatrz teraz na iloczyny $2 \cdot 4$, $5 \cdot 9$, $10 \cdot 16$. W których rzędach są położone wyniki? Dlaczego?

Wykorzystaj ten dywanik do pokazania, że suma kolejnych liczb nieparzystych jest kwadratem liczby naturalnej, a następnie znajdź inne intrygujące własności dywanika.

Ćwiczenie 3.11. Zajrzyj do książek, w których opisany jest trójkąt Pascala. Znajdź ciekawe własności „dywanika liczbowego” przez niego utworzonego.

Ćwiczenie 3.12. Spójrz na poniższą ciekawostkę. Czy sądzisz, że warto poszukiwać innych, jeszcze bardziej skomplikowanych zależności?

$$\begin{aligned}
 1 + 15 + 42 + 98 + 123 + 179 + 206 + 220 &= \\
 &= 3 + 11 + 46 + 92 + 129 + 175 + 210 + 218 \\
 1^2 + 15^2 + 42^2 + 98^2 + 123^2 + 179^2 + 206^2 + 220^2 &= \\
 &= 3^2 + 11^2 + 46^2 + 92^2 + 129^2 + 175^2 + 210^2 + 218^2 \\
 1^3 + 15^3 + 42^3 + 98^3 + 123^3 + 179^3 + 206^3 + 220^3 &= \\
 &= 3^3 + 11^3 + 46^3 + 92^3 + 129^3 + 175^3 + 210^3 + 218^3 \\
 1^4 + 15^4 + 42^4 + 98^4 + 123^4 + 179^4 + 206^4 + 220^4 &= \\
 &= 3^4 + 11^4 + 46^4 + 92^4 + 129^4 + 175^4 + 210^4 + 218^4 \\
 1^5 + 15^5 + 42^5 + 98^5 + 123^5 + 179^5 + 206^5 + 220^5 &= \\
 &= 3^5 + 11^5 + 46^5 + 92^5 + 129^5 + 175^5 + 210^5 + 218^5 \\
 1^6 + 15^6 + 42^6 + 98^6 + 123^6 + 179^6 + 206^6 + 220^6 &= \\
 &= 3^6 + 11^6 + 46^6 + 92^6 + 129^6 + 175^6 + 210^6 + 218^6
 \end{aligned}$$

Potęgowanie

*Pytasz się, Wierchu, swym blaskiem,
 Patrzący do mego wnętrza,
 Czy wiem już, że wszystkim jest słońce,
 Że to potęga najświętsza?*

Jan Kasproicz, *Księga Ubogich* — XV

Sam termin, jakim określamy wielokrotne mnożenie liczby przez samą siebie, może wywołać ową *metafizyczną siłę przyciągającą*, o której pisał Leszek Kołakowski w eseju *Matematyk i mistyk* (zob. wykład *Matematyka z oddali*). Bo tak właśnie jest: jeśli tylko podstawa jest większa od 1, kolejne mnożenia doprowadzają do „potężnych” liczb.

$$(2\sqrt{2} + 4x)(4x -$$

$$(4x + 2\sqrt{2})(4x$$

$$16x^2 - (2\sqrt{2})^2 = 2(4x$$

$$16x^2 - 8x + 2x$$

$$\Delta = 4(4x^2 - 8x + 2) = 4 + 32$$

$$= 4 + 32$$

Przekazujemy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodajemy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.



GDAŃSKIE WYDAWNICTWO
OŚWIATOWE

www.gwo.pl