O nauczaniu matematyki

Michał Szurek

tom 7

Pieniądze

Statystyka opisowa

Michał Szurek

O nauczaniu matematyki

Wykłady
dla nauczycieli
i studentów

tom 7

Projekt graficzny, okładka: *Rafał Szczawiński, Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc, Jerzy Trzeciak*

Korekta: *Jacek Foromański*

Skład (TEX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-397-5

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80–309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80–876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59
tel./fax 0 801 643 917, fax 0 58 340 63 61
tel. 0 58 340 63 60, 0 58 340 63 63
http://www.gwo.pl e-mail: gwo@gwo.pl

Spis treści

Zadanie maturalne sprzed 125 lat

Przeanalizujemy teraz bardzo gruntownie zadanie z egzaminu maturalnego z czasów zaborów. Okaże się wyjątkowo interesujące. Rozwiązywali je w 1881 roku uczniowie klas ósmych liceów Okręgu Naukowego Warszawskiego. Przytaczam je w tłumaczeniu z rosyjskiego, gdyż dopiero od 1905 roku w szkołach Królestwa Kongresowego językiem wykładowym był polski.

0,46666… sumy otrzymanej ze sprzedaży weksla 36000 rs., z potrąceniem 8% za 9 miesięcy przed terminem, użyto na kupno lasu prostokątnego o długości 768 sążni, szerokości 175 sążni. Za resztę otrzymanych pieniędzy kupiono dom; dochód z domu za trzy miesiące stanowi tyle rubli, ile zapłacono za dziesięcinę[24] *lasu. Obliczyć, jaki procent przynosi kapitał użyty na kupno domu.*

Zadanie posłuży nam najpierw do uzmysłowienia sobie, czym jest weksel. Jest to jeden z papierów wartościowych, podobny do obligacji, o których piszę dalej. Wystawca weksla otrzymuje od kupującego określoną sumę pieniędzy, a w terminie oznaczonym na wekslu (termin wykupu) ma zwrócić pieniądze, zwykle więcej niż pożyczył. Przed tym terminem wystawca nie ma obowiązku wykupienia weksla. Dlatego weksel ma wtedy mniejszą wartość niż w dniu wykupu. To zmniejszenie wartości weksla nazywamy dyskontem handlowym.

Rozwiążmy to zadanie prawie według standardów współczesnego egzaminu maturalnego. Będziemy szukać odpowiedzi na kolejne naturalne pytania.

1. Zamieniamy 0,46666… na ułamek zwykły, sumując szereg geometryczny:

$$0{,}4(6) = \frac{4}{10} + 6 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{4}{10} + 6 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

2. Ile otrzymano za weksel? Za weksel otrzymano $36\,000 \cdot (1 - 0{,}08) = 33\,120$ [rubli srebrem].
3. Za ile kupiono las? Las kupiono za $\frac{7}{15} \cdot 33\,120 = 15\,456$ [rubli].
4. Za ile kupiono dom? Dom kupiono za resztę pieniędzy pozostałych ze sprzedaży lasu, to jest za $33\,120 - 15\,456 = 17\,664$ [rubli].
5. Ile dziesięcin miał las? Las miał $\frac{768 \cdot 175}{2400} = 56$ dziesięcin.
6. Ile płacono za dziesięcinę lasu? Płacono za nią $\frac{15\,456}{56} = 276$ [rubli].
7. Liczba otrzymana w punkcie 5 jest dochodem z domu za trzy miesiące. Ile wynosi dochód z domu za rok? Dochód z domu za rok wynosi 4 razy tyle, czyli $276 \cdot 4 = 1104$ [rubli srebrem].
8. Jaki procent przynosi kapitał użyty na kupno domu? Kapitał użyty na kupno domu przynosi procentowo dochód równy $\frac{1104}{17\,664} = 6{,}25\%$ w skali rocznej.

[24] Do zadania nie było dołączone niezbędne dziś wyjaśnienie, że dziesięcina to 2400 sążni kwadratowych.

Przenieśmy się na chwilę myślą w tamte lata. Zobaczmy maturzystów rozwiązujących to zadanie, piszących piórem z *obsadką* i *stalówką* maczaną w *kałamarzu*, suszących napisany tekst *bibułą* i starających się (na ogół bezskutecznie) wytrzeć *kleksy* gumką[25]. Niech dotrze też do naszej świadomości, że wszystkie obliczenia musieli wykonywać ręcznie. Nie mieli nawet prymitywnego kalkulatora z telefonu komórkowego. Zresztą, korzystanie z telefonów komórkowych pewnie i wtedy było zabronione. Chociaż… wcale nie! Na pewno nie było przepisu, który mówiłby: „nie wolno używać telefonów komórkowych".

Korzystając z okazji, przypomnę dawne miary. Historycznie *sążeń* to szerokość rozkrzyżowanych rąk (stąd nazwa, od *sięgać*). Jak zwykle, w dawnych czasach niemal każdy powiat miał swoje własne miary. W zaborze rosyjskim na ziemiach polskich dekretem z 1849 roku wprowadzono sążeń rosyjski. W układzie metrycznym był on równy 2,1336 m. Proponowane niżej zadanie przeliczenia dziesięciny na hektary wcale nie będzie łatwe dla uczniów gimnazjów, nawet jeśli — co oczywiście polecam — użyją kalkulatora.

Zadanie 1. 1 sążeń = 3 arszyny = 7 stóp = 48 werszków = 84 cale = 2,1336 metra. Wiedząc, że 768×175 sążni to 56 dziesięcin, oblicz, ile hektarów miała dziesięcina.

Zadanie maturalne AD 1881 wyjątkowo dobrze nadaje się do realiów naszego kraju AD 2006. Wystarczy drobny retusz. Oto zadanie z czasów głębokiego caratu przerobione na obecne realia.

Zadanie 2. Dwaj bracia otrzymali w spadku 360 tysięcy złotych. Podzielili się nim w stosunku $8:7$ (starszy wziął oczywiście więcej). Każdy zapłacił 8% podatku spadkowego. Młodszy z braci kupił mieszkanie o powierzchni 56 m^2. Starszy ulokował pieniądze w banku na lokacie z kwartalną kapitalizacją. Odsetki z tej lokaty nie są doliczane do stanu konta, tylko wypłacane, po potrąceniu podatku od lokat w wysokości 20%. Efektywny kwartalny dochód z lokaty jest równy cenie metra kwadratowego mieszkania zakupionego przez młodszego brata. Na jaki procent został złożony majątek starszego brata?

Wykorzystam zadanie z 1881 roku — a raczej jego uwspółcześnioną wersję przytoczoną powyżej — do pogadanki o układaniu zadań i o niestandardowych metodach ich rozwiązywania. W zadaniu tym występują mianowicie takie dane:

m — majątek odziedziczony przez braci,
d — stosunek podziału,
p — procent podatku spadkowego,
s — powierzchnia mieszkania,

[25] O znaczenie słów zaznaczonych kursywą zapytaj dziadka.

c_1 — cena za metr kwadratowy mieszkania,

d_1 — wysokość podatku od lokat,

q — procent, na jaki został złożony majątek starszego brata,

c_2 — dochód z lokaty za kwartał (po podatku od lokat).

Z treści zadania mamy $c_1 = c_2$. Zadanie maturalne polegało na obliczeniu q, gdy znamy m, d, p, s, c_1, c_2, d_1. Możemy zatem ułożyć siedem innych zadań — w każdym z nich przyjmujemy, że znamy siedem spośród tych danych, a mamy obliczyć ósmą.

Oto pierwsze z tych zadań, lekko zmodyfikowane:

Zadanie 3. Dwaj bracia odziedziczyli 360 tysięcy złotych. Podzielili się nimi nie po połowie, a w pewien inny sposób, z tym że młodszy brat dostał mniejszą część. Podatek spadkowy wyniósł 8%. Za pozostałe pieniądze młodszy brat kupił mieszkanie o powierzchni 56 m^2, a starszy ulokował pieniądze na lokacie o oprocentowaniu $7\frac{13}{16}$% z kwartalną kapitalizacją odsetek. Kwartalne odsetki nie są doliczane do rachunku, a wypłacane klientowi, z tym że od dochodów z lokat pobierany jest podatek w wysokości 20%. Po trzech miesiącach starszy brat otrzymał tyle, ile wynosiła cena metra kwadratowego mieszkania, które kupił młodszy brat. W jakim stosunku bracia podzielili pieniądze?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x tę część pieniędzy, którą wziął młodszy brat. Zatem mieszkanie kupił za $0{,}92 \cdot 360\,000 \cdot x$, a więc za metr kwadratowy zapłacił $\frac{0{,}92 \cdot 360\,000 \cdot x}{56} = \frac{41\,400\,x}{7}$ złotych. Starszy brat otrzymał $(1 - x) \cdot 360\,000$ złotych. Roczny procent $7\frac{13}{16}$ po uwzględnieniu 20% podatku od lokat obniża się do $0{,}8 \cdot 7\frac{13}{16} = 6\frac{1}{4}$%. Po kwartale starszy brat otrzymuje zatem z banku wypłatę w wysokości $\frac{92}{100} \cdot (1 - x) \cdot \frac{6\frac{1}{4}}{400} \cdot 360\,000 = 5175 \cdot (1 - x)$ złotych. Otrzymujemy zatem równanie $\frac{41\,400\,x}{7} = 5175 \cdot (1 - x)$, skąd wyznaczamy $x = \frac{7}{15}$. Bracia podzielili się zatem w stosunku $8:7$.

Następne zadanie może być na przykład takie:

Zadanie 4. Dwaj bracia odziedziczyli 360 tysięcy złotych. Podzielili się nimi tak, że starszy wziął $\frac{8}{15}$ tej sumy, a młodszy $\frac{7}{15}$. Każdy z nich zapłacił podatek spadkowy w wysokości 8%. Za pozostałe pieniądze młodszy brat kupił mieszkanie, a starszy ulokował swoje w banku na lokacie o oprocentowaniu $7\frac{13}{16}$% z kwartalną kapitalizacją. Kwartalne odsetki nie są doliczane do rachunku, a wypłacane klientowi, z tym że od dochodów z lokat pobierany jest podatek w wysokości 20%. Po trzech miesiącach starszy brat otrzymał tyle, ile wynosiła cena metra kwadratowego mieszkania, które kupił młodszy brat. Ile metrów kwadratowych miało mieszkanie?

Jak poprawić wyniki nauczania? Dyrektor szkoły stwierdza, że w klasach *A* i *B* oceny semestralne różnią się znacznie. Przesuwa kilku uczniów z klasy *A* do klasy *B* i osiąga cel: w obu klasach wzrosła średnia ocen.

Nietrudno zrozumieć, jak to jest możliwe. Jeśli w klasie *A* jest uczeń, który ma średnią ocen niższą od średniej klasy *A*, ale wyższą od średniej klasy *B*, to przesunięcie go do *B* spowoduje ten właśnie skutek. Na tym efekcie oparte jest przekonanie autorów *Encyklopedii galicyjskiej* (wyd. Anabasis, Kraków 1998), że w dniu, w którym Zygmunt III Waza wraz z dworem przeniósł się do Warszawy, w obu tych miastach wzrósł średni poziom inteligencji.

Jak można dać każdemu podwyżkę, powodując jednocześnie spadek średniego wynagrodzenia? Proste: dać niewielką podwyżkę tym, którzy już pracują, i przyjąć do pracy wiele nisko płatnych osób. Średnia spadnie… a w warunkach zadania nie było przecież mowy o globalnym funduszu płac. Podobno przed 1989 rokiem pewien dyrektor państwowego zakładu pracy tak się zachował.

Regularne pływanie. W czasie pobytu w sanatorium wróciłem do regularnego pływania. Pływam wolno, bo już nie te lata… Wiem, że przez pierwsze pół godziny mogę przepłynąć w 3 minuty dwie długości basenu. Przez następne pół godziny płynę już wolniej: na każdą długość basenu zużywam dwie minuty. Ale — pomyślałem sobie — skoro najpierw pokonuję dwie długości w trzy minuty, a potem jedną w dwie minuty, to średnio daje to trzy długości basenu w 5 minut, a zatem 36 — w godzinę.

Zrobiłem tak, jak sobie wyliczyłem. Na ścianie pływalni wisiał duży zegar i mogłem precyzyjnie kontrolować swój czas. Najpierw dwie długości na 3 minuty, potem jedna długość na dwie minuty. Okazało się jednak, że przepłynąłem nie 36, a 35 długości basenu.

Po kilku dniach pływałem już nieco szybciej. Najpierw 5 długości basenu w 7 minut, a po pewnym czasie (i zmęczeniu) 3 długości w 5 minut. Pomyślałem sobie, że średnio da to 8 długości w 12 minut, czyli 40 w godzinę. Zatem pierwsze 20 długości popłynę szybciej, a potem zwolnię, żeby średnia była taka, jak zaplanowałem. Potem następne 20 długości w wolniejszym tempie. Kontrolowałem czas… i znów nie wyszło. Stojąc pod prysznicem po wyjściu z pływalni, zrozumiałem, dlaczego. Po prostu dodawałem ułamki tak, jak zły uczeń: licznik do licznika, mianownik do mianownika.

Jeszcze jeden przykład manipulacji średnią. Omówię dokładniej paradoks, o jakim wspomniałem w wykładzie 10. W Europie zużycie paliwa przez samochód opisujemy liczbą litrów, jakie samochód zużywa na 100 km. W USA jest inna zasada: podajemy, ile mil przejedziemy na jednym galonie. Nie wchodząc w amerykańskie miary, obliczmy „po europejsku" i „po amerykańsku" średnie zużycie paliwa w samochodzie moim i mojej żony. Mój samochód zużywa przeciętnie 8 litrów na 100 kilometrów. Żona ma cięższy samochód, większej mocy i jeździ energiczniej. Przeciętne zużycie paliwa przez jej samochód to 12,5 litra na 100 km. Jeździmy tak samo często. Jakie mamy przeciętne zużycie paliwa? Oczywiście $\frac{8+12{,}5}{2} = 10{,}25$ litra na 100 kilometrów. Obliczmy to jednak inaczej, sposobem amerykańskim. Ja na jednym litrze przejadę aż 12,5 kilometra, żona przejedzie tylko 8 km. Przypominam, że jeździmy równie często. A zatem średnio przejeżdżamy na jednym litrze paliwa $\frac{12{,}5+8}{2} = 10{,}25$ kilometra. Zgadza się? Nie! Dziesięć i ćwierć kilometra na jednym litrze paliwa to zużycie mniejsze niż 10,25 litrów benzyny na 100 kilometrów!

Rozwiązanie paradoksu łatwo zrozumieć. Znajdźmy wzór na konwersję amerykańskiego sposobu obliczania średniej na europejski. Jeśli przejeżdżam a kilometrów na jednym litrze paliwa, to na sto kilometrów zużyję $\frac{100}{a}$ litrów. Wykresem funkcji $f(a) = \frac{100}{a}$ jest hiperbola. Niech p i q będą dwiema liczbami, reprezentującymi zużycie paliwa w litrach na 100 kilometrów. Średnie zużycie obliczone po europejsku to oczywiście $\frac{p+q}{2}$ litrów na 100 kilometrów. A po amerykańsku? To średnia liczb $\frac{100}{a}$ i $\frac{100}{b}$, czyli $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{a} + \frac{100}{b}\right)$. Gdy chcemy ten wynik „przerobić na Europę”, musimy do wyniku zastosować funkcję odwrotną do f, a więc funkcję $g(y) = \frac{1}{100y}$. Ale wartością tej funkcji dla $y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{a} + \frac{100}{b}\right)$ nie jest średnia arytmetyczna liczb a, b.

Paradoks Simsona. O miejsce w reprezentacji Polski w piłce nożnej ubiegali się dwaj obywatele naszego kraju: Mugabe Burunda z klubu Liverpool i Nugat Pereira da Silva Corto y Derecho (grający na co dzień w Pogoni Szczecin). Trener Michał Kojonkowski poddał ich testowi. W poniedziałek i wtorek strzelali do pustej bramki. Mugabe strzelał 50 razy, z czego 15 strzałów było celnych. Pereira strzelał 25 razy i trafił 7 razy. We wtorek Mugabe strzelał 25 razy. Dziesięć strzałów ugrzęzło w siatce. Dla równowagi Pereira więcej: strzelał 50 razy i trafił 19 razy. W środę zebrał się zarząd. „No cóż, sprawa jest jasna. Mugabe miał w poniedziałek skuteczność 30%, a Pereira 28%. We wtorek sprawa się powtórzyła: Mugabe 40%, Pereira 38%. Powołujemy Mugabe!”. Sprawa by się zakończyła, ale wstał znany były piłkarz Zdzisław Coniek. „Zaraz, zaraz! Obydwaj strzelali 75 razy. Mugabe trafił $15 + 10 = 25$ razy, a Pereira $7 + 19 = 26$ razy. Nie jest to duża różnica, ale jednak Pereira jest górą. Powołujemy Pereirę!”.

Taka manipulacja procentami zdarza się bardzo często. Proszę przeczytać jeszcze raz ten przykład. Zrozumienie uodporni Państwa na podobne manipulacje, na które dają się nabrać nawet profesorowie matematyki (może nie profesorowie statystyki!). Ze swej strony nie sądzę, aby przyczyną niepowodzeń naszych piłkarzy na mistrzostwach świata 2006 roku była nieznajomość paradoksu Simsona w zarządzie Polskiego Związku Piłki Nożnej.

Przykład autentyczny! Oto inny przykład manipulacji danymi statystycznymi, aby uzyskać z góry założoną tezę. Omawiają to podręczniki statystyki, ale nie przypuszczałem, żeby ktoś dał się na to nabrać. Tymczasem…

Przekazujmy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE

www.gwo.pl