Rozwiązanie

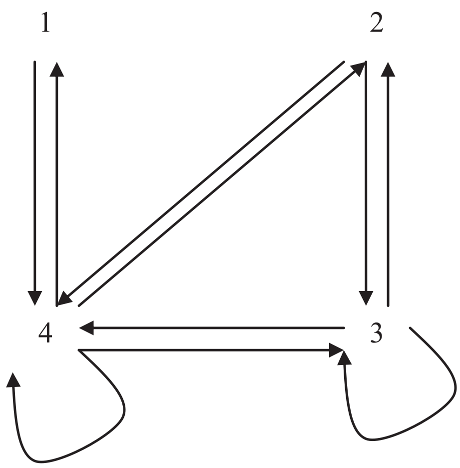
Relację tworzą wszystkie pary liczb, których suma jest nie mniejsza od 5, czyli można ją zapisać w postaci:

$P = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Aby przedstawić relację za pomocą macierzy, musisz zauważyć, że w pierwszym wierszu (podpisanym „1”) trzeba wstawić jedynkę w kolumnie „4” (spośród wszystkich par rozpoczynających się 1, tylko (1, 4) należy do relacji), w drugim wierszu jedynki muszą się pojawić w kolumnach „3” i „4” (spośród wszystkich par rozpoczynających się 2, tylko (2, 3) i (2, 4) należą do relacji), analogicznie w trzecim wierszu jedynki znajdą się we wszystkich kolumnach poza „1”, a w wierszu „4” we wszystkich bez wyjątku:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Ponieważ ten sam zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$ jest zarówno dziedziną, jak i przeciwdziedziną relacji P, do przedstawienia relacji można użyć grafu z jedną kopią każdego elementu. Przedstawia go rys. 3.2.



Rys. 3.2. Graf relacji

Zwróć uwagę na parę (3, 3), reprezentowaną przez strzałkę biegnącą od „3” do „3”. Takie strzałki, rozpoczynające się i kończące w tym samym punkcie (wierzchołku), nazywamy **pętlami**.

Przykład 3
Dane są relacje $P \subset A^2 : xPy \Leftrightarrow x \geq y$ i $Q \subset A^2 :\ xQy \Leftrightarrow x + y \geq 4$, przy czym $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Wyznacz ich dopełnienia, sumę, iloczyn, obie różnice i relacje odwrotne. Wynikowe relacje przedstaw za pomocą macierzy.

Rozwiązanie
Zacznijmy od przedstawienia obu relacji za pomocą macierzy:

$$\begin{array}{c|c} P & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dopełnienie relacji, podobnie jak dopełnienie każdego innego zbioru (relacja jest zbiorem par!), tworzą te elementy (czyli te pary), które nie należą do relacji. Zacznijmy od relacji P. 1 jest w relacji z 1, a nie jest z 2, 3 ani 4. Wynika stąd, że w relacji P' 1 nie jest z 1, a jest z 2, 3 i 4. Z tego względu, w macierzy relacji P' w wierszu „1" pierwszym elementem jest zero, a pozostałe to jedynki. Podobnie postępujemy z pozostałymi wierszami. Mówiąc inaczej, aby uzyskać macierz relacji P', wszystkie zera w macierzy relacji P zamieniamy na jedynki, a wszystkie jedynki na zera. Podobnie postępujemy z macierzą relacji Q. Efekt tych działań przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{c|c} P' & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q' & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suma relacji to zbiór tych par, które należą do przynajmniej jednej z nich. Na przykład element 1 jest w relacji P z 1, a w relacji Q z 3 i 4. Wynika stąd, że w relacji $P \cup Q$ jest z 1, 3 i 4. Jeżeli przy wyznaczaniu sumy relacji posługujesz się ich macierzami, musisz przepisać wszystkie jedynki, które występują w co najmniej jednej z wyjściowych macierzy. Iloczyn relacji to zbiór tych par, które należą do obu relacji. Wynika stąd, że jeżeli przy jego wyznaczaniu posługujesz się macierzami relacji, musisz przepisać wszystkie jedynki, które występują w obu macierzach. Sumę i iloczyn relacji P i Q przedstawiono poniżej:

$$
\begin{array}{c|cccc}
P \cup Q & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
P \cap Q & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Różnicę relacji tworzą te pary, które występują w pierwszej relacji, ale nie występują w drugiej. Rozpatrzmy na przykład różnicę $P \setminus Q$, a dokładniej pary rozpoczynające się od 2. Do relacji P należą pary (2, 1) i (2, 2), a do relacji Q pary (2, 2), (2, 3) i (2, 4). Spośród nich tylko para (2, 1) należy do P i nie należy do Q. Odnosząc to do reprezentacji macierzowej: w wierszu „2" tylko jedynka w kolumnie „1" występuje w macierzy relacji P i nie występuje w macierzy Q. Analogicznie, w wierszu „2" tylko jedynki w kolumnach „3" i „4" występują w macierzy relacji Q i nie występują w P. Analizując w podobny sposób pozostałe wiersze, otrzymujemy macierze różnic:

$$
\begin{array}{c|cccc}
P \setminus Q & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
Q \setminus P & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Aby utworzyć macierz relacji odwrotnej, przepisujemy wiersze macierzy wyjściowej relacji jako kolumny (albo kolumny jako wiersze)[8]. Na przykład, pierwszy wiersz macierzy relacji P składa się z elementów 1, 0, 0 i 0, więc w takiej kolejności utworzą one pierwszą kolumnę macierzy relacji P^{-1}. Podobnie postępujemy z pozostałymi wierszami macierzy relacji P i Q, otrzymując macierze relacji odwrotnych. Zwróć uwagę, że relacje Q i Q^{-1} są sobie równe.

$$
\begin{array}{c|cccc}
P^{-1} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
Q^{-1} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

[8] Czynność ta określana jest jako transponowanie (transpozycja) macierzy. Więcej na ten temat dowiesz się z kolejnych rozdziałów.

Przykład 4
Dane są relacje $P \subset B \times C : xPy \Leftrightarrow x + y \leq 5$ i $Q \subset A \times B : xQy \Leftrightarrow x \cdot y \geq 5$, przy czym $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ i $C = \{0, 2, 4\}$. Przedstaw je w postaci macierzy i wyznacz złożenie $P \circ Q$.

Rozwiązanie
Macierze relacji wyglądają następująco:

$$\begin{array}{c|c} P & \begin{matrix} 0 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Z definicji złożenia wynika, że w badanym przypadku jest ono zawarte w iloczynie kartezjańskim $A \times C$. Składa się ze wszystkich par (x, y) takich, że istnieje choć jeden element $z \in B$ taki, że xQz i zPy. Sprawdzanie każdej pary iloczynu $A \times C$ może jednak być bardzo pracochłonne, dlatego też posłużymy się inną metodą. Szukamy złożenia $P \circ Q$, a więc dla każdego elementu x należącego do $D(Q)$ (czyli do dziedziny relacji Q, w tym wypadku jest nią zbiór A) sprawdzamy, z którymi elementami $D^{-1}(Q)$ (przeciwdziedziny Q, czyli zbioru B) jest on w relacji Q. Dla każdego takiego elementu sprawdzamy, z którymi z kolei elementami jest on w relacji P. I te elementy są w relacji $P \circ Q$ z elementem x. Poniżej przedstawione zostały kolejne fazy wyznaczania macierzy relacji $P \circ Q$.

$$\begin{array}{c|c} P \circ Q & \begin{matrix} 0 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} P \circ Q & \begin{matrix} 0 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} P \circ Q & \begin{matrix} 0 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rozpatrzmy wszystkie elementy $D(Q)$. Zacznijmy od 1. Jest ona w relacji Q tylko z 5 (w macierzy relacji Q w wierszu „1” jedyna jedynka znajduje się w kolumnie „5”). W związku z tym wyszukujemy wiersz „5” w macierzy relacji P i przepisujemy z niego wszystkie jedynki. Jest tylko jedna taka jedynka, w kolumnie „0”. Przepisujemy ją do macierzy złożenia, uzupełniając wiersz zerami (pierwsza macierz z lewej). Przechodzimy do kolejnego elementu $D(Q)$, a więc 2. W wierszu „2” w macierzy Q odnajdujemy jedynki w kolumnach „3”, „4” i „5”, a więc w macierzy relacji P sprawdzamy właśnie wiersze „3”, „4” i „5”. W wierszu „3” są dwie jedynki: w kolumnach „0” i „2”. W wierszu „4” jest jedna jedynka, w kolumnie „0”. W wierszu „5” również jedna, w kolumnie „0”. Ostatecznie jedynki występują w kolumnach „0” i „2” (nie ma znaczenia, że w kolumnie „0” trzykrotnie). Dlatego do macierzy złożenia wpisujemy jedynki w kolumnach „0” i „2”, a resztę rozpatrywanego wiersza „2” uzupełniamy zerami (a właściwie jednym zerem w kolumnie „4”). Efekt naszych działań widać w środkowej macierzy. Ostatnim rozpatrywanym elementem $D(Q)$ jest 3. W relacji Q jest z elementami 2, 3, 4 i 5. Sprawdzamy odpowiednie wiersze w macierzy relacji P i ustalamy, że biorąc je wszystkie pod uwagę, jedynki występują w kolumnach „0” i „2” (obie jedynki w wierszach „2” i „3”, ponadto jedna jedynka w kolumnie „0” w wierszach „4” i „5”). Tak więc do macierzy złożenia w wierszu „3” wpisujemy jedynki w kolumnach „0” i „2”. Ostateczny rezultat widzimy w ostatniej macierzy.

Przykład 5

Dane są relacje $P \subset A^2 : xPy \Leftrightarrow x \geq y$ i $Q \subset A^2 : xQy \Leftrightarrow x + y \geq 4$, przy czym $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Wyznacz złożenia $P \circ Q$, $Q \circ P$, $P \circ P$ i $Q \circ Q$.

Rozwiązanie

Macierze obu relacji przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{c|c} P & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Operację złożenia w każdym z wymienionych przypadków wykonujemy identycznie jak w poprzednim przykładzie. Zauważ tylko, że obie relacje określone są na iloczynie zbioru A ze sobą, więc również każde ze złożeń będzie się zawierać w iloczynie A^2.

W przypadku złożenia $P \circ Q$ sprawdzamy najpierw, z którymi elementami są poszczególne elementy w relacji Q, a następnie P. Na przykład rozpatrzmy element 1. W relacji Q jest on z elementami 3 i 4. Przechodzimy do macierzy relacji P i zauważamy, że w wierszach „3” i „4” jedynki występują we wszystkich kolumnach. Tak więc ostatecznie 1 jest w relacji złożenia ze wszystkimi elementami. Analogicznie postępujemy ze złożeniem $Q \circ P$, jednak tutaj najpierw sprawdzamy relację P, a później Q. Na przykład 1 jest w relacji P tylko z 1, z kolei w relacji Q 1 jest w relacji z 3 i 4. Ostatecznie więc 1 jest w relacji złożenia z 3 i 4. Efekt końcowy przedstawiono poniżej:

$$\begin{array}{c|c} P \circ Q & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q \circ P & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Złożenia $P \circ P$ (czyli P^2) i $Q \circ Q$ (czyli Q^2) wyznaczamy podobnie, biorąc pod uwagę dwukrotnie macierz relacji P (lub odpowiednio Q):

$$\begin{array}{c|c} P^2 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} Q^2 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ZADANIA

1. Dla poniższych relacji wypisz wszystkie tworzące je pary, przedstaw w postaci macierzy i grafu (tam, gdzie to możliwe, użyj uproszczonej wersji grafu).
   a) $P \subset A \times B : xPy \Leftrightarrow x + y \leq 3$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$;
   b) $P \subset A^2 : xPy \Leftrightarrow \exists\, k \in Z : x - y = 2k$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
   c) $P \subset A \times B : \quad xPy \Leftrightarrow \exists\, k \in Z : x - y = 3k, \quad A = \{x \in N : x < 2\}$, $B = \{x \in N : x < 4\}$;
   d) $P \subset A^2 : xPy \Leftrightarrow x^2 < y^2$, $A = \{x \in Z : -1 \leq x \leq 3\}$.
2. Przedstaw poniższe pary relacji w postaci macierzy, a następnie wyznacz ich dopełnienia, sumy, iloczyny, różnice i relacje odwrotne (tam, gdzie to możliwe):
   a) $P \subset A \times B : xPy \Leftrightarrow x + y \leq 2$, $Q \subset A \times B : xQy \Leftrightarrow x - y \geq -1$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$;
   b) $P \subset A^2 : xPy \Leftrightarrow \exists\, k \in Z : x - y = 2k$, $Q \subset A^2 : xQy \Leftrightarrow xy > 0$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$;
   c) $P \subset A \times B : xPy \Leftrightarrow xy \leq 2$, $Q \subset B \times C : xQy \Leftrightarrow xy \geq 1$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{ x \in N : x < 2\}$.
3. Dla poniższych par relacji wyznacz wszystkie możliwe złożenia spośród $P \circ Q$, $Q \circ P$, P^2 i Q^2:
   a) $P \subset A \times B : xPy \Leftrightarrow x + y \leq 2, \qquad Q \subset A \times B : xQy \Leftrightarrow x - y \geq -1$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$;

ODPOWIEDZI

1. Przykładowe rozwiązanie ogólne i rozwiązania bazowe (r.b.):
   a) $x_1 = 2, x_2 = 1$;
   b) $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$;
   c) układ sprzeczny;
   d) układ sprzeczny;
   e) $x_1 = 40 - 2a, x_2 = a$, gdzie $a \in R$, r.b.: (40, 0), (0, 20);
   f) $x_1 = 34 + 33a, x_2 = -12 - 13a, x_3 = a$, gdzie $a \in R$; r.b.: (34, –12, 0), (46/13, 0, –12/13), (0, 46/33, –34/33);
   g) $x_1 = 13/2 - a_1 - 5/2a_2,\ x_2 = a_1,\ x_3 = 1,\ x_4 = a_2$, gdzie $a_1, a_2 \in R$; r.b.: (13/2, 0, 1, 0), (0, 13/2, 1, 0), (0, 0, 1, 13/5);
   h) $x_1 = 10 - 11a_1 + 2a_2,\ x_2 = -3 + 5a_1 - a_2,\ x_3 = a_1,\ x_4 = a_2$, gdzie $a_1, a_2 \in R$; r.b.: (10, –3, 0, 0), (17/5, 0, 3/5, 0), (4, 0, 0, –3), (0, 17/11, 10/11, 0), (0, 2, 0, –5), (0, 0, 4, 17);
   i) $x_1 = -2 + 5a, x_2 = 2, x_3 = a, x_4 = 1$, gdzie $a \in R$; r.b.: (–2, 2, 0, 1), (0, 2, 2/5, 1);
   j) $x_1 = 2 + a,\ x_2 = 2 - 5a,\ x_3 = a,\ x_4 = 1$, gdzie $a \in R$; r.b.: (2, 2, 0, 1), (12/5, 0, 2/5, 1), (0, 12 –2, 1).

5.2. UKŁADY NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH

TEORIA W PIGUŁCE

Tak jak w przypadku równań, również w przypadku nierówności liniowych podarujemy sobie ich formalne definiowanie. Rozwiązywanie układów nierówności sprowadza się do rozwiązywania układów równań. Wystarczy tylko zmodyfikować lewą stronę każdej z nierówności należących do układu. Dokładniej, każdej nierówności przypisujemy dodatkową zmienną, tzw. **zmienną uzupełniającą**. Przy tym, jeżeli nierówność ma zwrot „≤", zmienną uzupełniającą dodajemy. W przeciwnym razie – odejmujemy. Na przyklad, jeżeli układ nierówności ma postać:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 7, \end{cases}$$

to po dodaniu zmiennych uzupełniających przyjmuje postać następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 = 7. \end{cases}$$

Uwaga: zmienne uzupełniające muszą być nieujemne.
Macierz rozszerzona układu składa się z trzech segmentów: segment pierwszy to macierz odpowiadająca współczynnikom lewych stron wyjściowego układu nierówności, drugi, środkowy to współczynniki stojące przy zmiennych uzupełniających, trzeci – to prawe strony. Podczas eliminacji macierzy celem jest uzyskanie postaci bazowej tylko w pierwszym segmencie. Podobnie jak w przypadku układu równań, możliwe są różne sytuacje. Tym razem rozpatrujemy jednak tylko dwa przypadki.
Jeżeli po eliminacji w pierwszym segmencie macierzy nie ma wiersza złożonego z samych zer, możemy wyznaczyć rozwiązanie ogólne. Zmienne uzupełniające zawsze są parametrami. Pamiętaj, że parametry odpowiadające „zwykłym" zmiennym mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste (podobnie jak w przypadku układów równań), zaś parametry odpowiadające zmiennym uzupełniającym muszą być nieujemne. W trakcie wypisywania rozwiązań bazowych musisz pamiętać, żeby wyeliminować wszystkie te, w których chociaż jedna zmienna uzupełniająca jest ujemna. Pamiętaj również o tym, że zapisując rozwiązanie ogólne, wypisujemy tylko wartości „zwykłych" zmiennych, zaś w przypadku rozwiązań bazowych – także zmiennych uzupełniających.
Jeżeli po eliminacji w pierwszym segmencie macierzy jest przynajmniej jeden wiersz złożony z samych zer, trzeba sprawdzić niesprzeczność układu. W tym celu zapisujemy pozostałą część zerowych wierszy (a więc część segmentów drugiego i trzeciego) i odpowiadający jej układ równań. Jeżeli posiada on chociaż jedno rozwiązanie bazowe nieujemne, wyjściowy układ nierówności ma rozwiązania i postępujemy dalej tak jak w pierwszym przypadku (musisz tylko pamiętać o dodatkowych warunkach dotyczących parametrów odpowiadających zmiennym uzupełniającym; przeanalizuj dokładnie przykład 2). Jeżeli zaś każde rozwiązanie bazowe tego mniejszego układu równań zawiera choć jedną ujemną zmienną, wyjściowy układ nierówności jest sprzeczny. **Uwaga**: można od razu przejść do wyznaczania rozwiązań bazowych wyjściowego układu równań. Jeżeli jest on sprzeczny, poświęcisz na stwierdzenie tego faktu dużo więcej czasu. Metodę tę będziemy jednak stosować w kolejnym podrozdziale – w przypadku zadań programowania liniowego, zwłaszcza odpowiadających realnym problemom ekonomicznym, sprzeczność zachodzi bardzo rzadko.

PRZYKŁADY

Przykład 1

Rozwiąż układ nierówności:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Rozpoczynamy od sprowadzenia układu do postaci uzupełnionej. W tym celu użyjemy dwóch nowych zmiennych: x_3 w pierwszej nierówności i x_4 w drugiej. Ponieważ obie nierówności maja zwrot „≤", obie zmienne dodamy do lewych stron. Powstanie w ten sposób układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad = 12, \\ 2x_1 + \; x_2 \qquad + x_4 = \; 6. \end{cases}$$

przy czym $x_3, x_4 \geq 0$. Macierz układu pokazano poniżej (pierwsza macierz); pokazano tam też proces eliminacji macierzy. Zauważ, że jej drugi segment to macierz jednostkowa. Będzie tak zawsze, gdyż w każdej nierówności występuje jedna, inna, zmienna uzupełniająca (ewentualnie któraś z jedynek może wystąpić ze zmienionym znakiem, jeżeli odpowiadająca jej zmienna uzupełniająca jest odjęta, czyli gdy nierówność miała zwrot „≥").

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 4 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = \frac{1}{2} w_1 \\ w_2' = w_2 - w_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 + \frac{2}{3} w_2 \\ w_2' = -\frac{1}{3} w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right].$$

W zredukowanej macierzy w pierwszym segmencie nie ma wyzerowanych wierszy, więc nie musimy sprawdzać niesprzeczności. Możemy odczytać następującą zredukowaną postać układu równań:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{6} x_3 + \frac{2}{3} x_4 = 2, \\ \qquad x_2 + \frac{1}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_4 = 2. \end{cases}$$

Ponieważ macierz jednostkową tworzą kolumny zmiennych x_1 i x_2, wśród „zwykłych" zmiennych nie ma parametrów. Parametrami są wyłącznie zmienne uzupełniające. Możemy więc przyjąć, że x_3 i x_4 są, odpowiednio, parametrami a_1 i a_2 i zapisać następujące rozwiązanie:

$x_1 = 2 + 1/6a_1 - 2/3a_2$, $x_2 = 2 - 1/3a_1 + 1/3a_2$, gdzie $a_1, a_2 \in R_+ \cup \{0\}$.

Przejdźmy do wyznaczenia rozwiązań bazowych. Zauważ, że rząd macierzy układu wynosi $r(A) = 2$, więc trzeba sprawdzić wszystkie kombinacje dwóch zmiennych z czterech. Jest ich sześć. W przypadku bazy $B^{(1)} = \{x_1, x_2\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_3 = x_4 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(1)} = (2,\ 2,\ 0,\ 0)$. W przypadku bazy $B^{(2)} = \{x_1, x_3\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_2 = x_4 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(2)} = (3,\ 0,\ 6,\ 0)$. W przypadku bazy $B^{(3)} = \{x_1, x_4\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_2 = x_3 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(3)} = (6,\ 0,\ 0,\ -6)$. To rozwiązanie odrzucamy, gdyż jedna ze zmiennych uzupełniających jest ujemna ($x_4 = -6$). W przypadku bazy $B^{(4)} = \{x_2, x_3\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_1 = x_4 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(4)} = (0,\ 6,\ -12,\ 0)$. To rozwiązanie również odrzucamy ($x_3 = -12 < 0$). W przypadku bazy $B^{(5)} = \{x_2, x_4\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_1 = x_3 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(5)} = (0,\ 3,\ 0,\ 3)$. W przypadku bazy $B^{(6)} = \{x_3, x_4\}$ do zredukowanego układu podstawiamy $x_1 = x_2 = 0$ i otrzymujemy rozwiązanie $x^{(6)} = (0,\ 0,\ 12,\ 6)$. Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że badany układ nierówności ma cztery **dopuszczalne** rozwiązania bazowe: $x^{(1)} = (2, 2, 0, 0)$, $x^{(2)} = (3,\ 0,\ 6,\ 0)$, $x^{(5)} = (0, 3, 0, 3)$ i $x^{(6)} = (0, 0, 12, 6)$. Dwa pozostałe rozwiązania są **niedopuszczalne**[16].

Przykład 2
Rozwiąż układ nierówności:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 4. \end{cases}$$

Rozwiązanie
Postać uzupełniona układu wygląda następująco:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 & = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 \qquad + x_5 & = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 & = 4. \end{cases}$$

Zwróć uwagę, że zmienna x_4, będąca zmienną uzupełniającą pierwszej nierówności, ma współczynnik „–1”, gdyż nierówność ta ma zwrot „≥”. Macierz rozszerzoną układu i jej eliminację przedstawiono poniżej:

[16] Czasami, dla uproszczenia, rozwiązania bazowe dopuszczalne są nazywane po prostu rozwiązaniami bazowymi, zaś o rozwiązaniach niedopuszczalnych w ogóle się nie wspomina.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 \\ w_2' = w_2 - 2w_1 \rightarrow \\ w_3' = w_3 - w_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1' = w_1 - 3w_2 \\ w_2' = w_2 \qquad \rightarrow \\ w_3' = w_3 - w_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -10 & -7 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Pierwszy segment macierzy uzyskał postać zredukowaną, jednak występuje w nim wyzerowany wiersz (trzeci). Oznacza to, że trzeba sprawdzić niesprzeczność układu. W tym celu zapisujemy macierz złożoną z tych wierszy, których część w pierwszym segmencie się wyzerowała, i tych kolumn, które leżą w pozostałych częściach zredukowanej macierzy. W naszym przypadku oznacza to zapisanie macierzy składającej się wyłącznie z trzeciego wiersza macierzy zredukowanej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(zauważ, że jej rząd wynosi 1). Kolejnym krokiem jest zapisanie układu równań odpowiadającego tej macierzy. W naszym przypadku składa się on z jednego równania: $-x_4 - x_5 + x_6 = 2$. Teraz staramy się znaleźć przynajmniej jedno dopuszczalne rozwiązanie bazowe tego mniejszego układu (tu: równania). Rozpatrywany jednorównaniowy układ ma trzy rozwiązania bazowe: $x^{(1)} = (-2, 0, 0)$ odpowiadające bazie $B^{(1)} = \{x_4\}$, $x^{(2)} = (0, -2, 0)$ odpowiadające bazie $B^{(2)} = \{x_5\}$ i $x^{(3)} = (0, 0, 2)$ odpowiadające bazie $B^{(3)} = \{x_6\}$. Jak widać, trzecie z nich ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 2$) jest w całości nieujemne, czyli dopuszczalne. Oznacza to, że wyjściowy układ nierówności nie jest sprzeczny.

Rozwiązanie ogólne układu odczytujemy z tych wierszy macierzy, w których nie ma zerowych fragmentów w pierwszym segmencie. W naszym wypadku są to wszystkie wiersze poza trzecim, czyli pierwszy i drugi. Zredukowany układ równań ma postać:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 10x_3 - 7x_4 - 3x_5 = \ \ 6, \\ \qquad x_2 + \ \ 3x_3 + 2x_4 + \ \ x_5 = -1. \end{cases}$$