1. Podrozmaitości przestrzeni afinicznych

Zaczniemy od przypomnienia kilku pojęć z algebry liniowej i analizy oraz ustalenia oznaczeń.

Prawie wszystkie zbiory, które będziemy rozważać, będą podzbiorami przestrzeni afinicznej nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przestrzeń afiniczna n-wymiarowa składa się ze zbioru punktów $\mathbb{R}^n$ i n-wymiarowej przestrzeni liniowej wektorów swobodnych, którą będziemy oznaczali symbolem $T(\mathbb{R}^n)$. Zarówno punkty, jak i wektory, to n-elementowe ciągi liczb rzeczywistych. Aby odróżnić punkty od wektorów, współrzędne punktów będziemy zapisywać w nawiasach okrągłych, współrzędne wektorów — w kwadratowych. Wektor możemy dodać do punktu i otrzymujemy wtedy punkt, różnicą dwóch punktów jest wektor. Wektory bazy standardowej przestrzeni $T(\mathbb{R}^n)$ będziemy oznaczali symbolami $e_1, e_2, \ldots, e_n$, a punkt $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ będziemy zapisywali w skrócie jako 0. Termin „przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$" będzie oznaczał przestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle [x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ na przestrzeni wektorów swobodnych $T(\mathbb{R}^n)$.

1.1. Definicja. Przekształcenie $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m) : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ określone na otwartym podzbiorze W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywa się **przekształceniem gładkim** lub **odwzorowaniem gładkim** wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest klasy C^∞ (co oznacza, że Φ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalne, czyli funkcje współrzędne Φ_i mają ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów).

1.2. Uwaga. Otwartość zbioru W jest jednym z warunków gładkości przekształcenia. Dla wygody będziemy jednak czasem używać terminu „przekształcenie gładkie" w odniesieniu do przekształceń zbiorów niekoniecznie otwartych. Zawsze będziemy wtedy mieli na myśli obcięcia przekształceń gładkich określonych na zbiorach otwartych.

1.3. Uwaga. Dla $x \in W$ **różniczka** $d\Phi_x : T(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T(\mathbb{R}^m)$ przekształcenia Φ w punkcie x, czyli przekształcenie liniowe takie, że

$$\lim_{v\to 0} \frac{|\Phi(x+v) - \Phi(x) - d\Phi_x(v)|}{|v|} = 0,$$

przyporządkowuje wektorowi $v \in T(\mathbb{R}^n)$ pochodną kierunkową

$$d\Phi_x(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(x+tv) - \Phi(x)}{t}.$$

Macierz różniczki oznaczana symbolem

$$\Phi'(x) = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\right]$$

nazywa się **macierzą Jacobiego**[1]. Jeśli $n = m$, to wyznacznik $J\Phi(x) :=$ $:= \det \Phi'(x)$ macierzy Jacobiego $\Phi'(x)$ nazywa się **jakobianem** przekształcenia Φ w punkcie x.

1.4. Definicja. Jeżeli przy powyższych oznaczeniach $m = n$, zaś Φ jest gładkie i przekształca zbiór otwarty W wzajemnie jednoznacznie na zbiór otwarty $\Phi(W)$ oraz przekształcenie odwrotne $\Phi^{-1} : \Phi(W) \to W$ jest gładkie, to Φ nazywa się **dyfeomorfizmem** lub **układem współrzędnych** na W.

1.5. Uwaga. Różniczka złożenia przekształceń jest równa złożeniu różniczek tych przekształceń: $d(\Phi \circ \Psi)_p = d\Phi_{\Psi(p)} \circ d\Psi_p$. Zatem macierze Jacobiego spełniają wzór na pochodną złożenia $(\Phi \circ \Psi)'(p) = \Phi'(\Psi(p)) \cdot \Psi'(p)$. Wynika z niego w szczególności, że jakobian $J\Phi(x)$ dyfeomorfizmu Φ w dowolnym punkcie $x \in W$ jest różny od zera. Bardzo ważne jest następujące twierdzenie odwrotne do tego faktu:

1.6. Twierdzenie (o odwzorowaniu odwrotnym). Jeśli $W \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym, $x_0 \in W$, a $\Phi : W \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem gładkim oraz $J\Phi(x_0) \neq 0$, to istnieje otoczenie $W_0 \subset W$ punktu x_0 przekształcane dyfeomorficznie na $\Phi(W_0)$, tzn. takie, że $\Phi|_{W_0} : W_0 \to \Phi(W_0)$ jest dyfeomorfizmem. $\square$

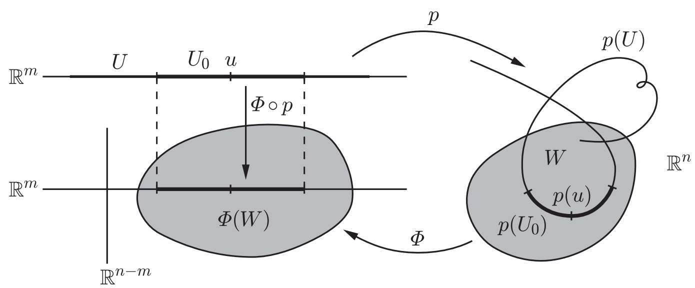
1.7. Definicja. Niech $p : U \to \mathbb{R}^n$ będzie gładkim przekształceniem określonym na otwartym podzbiorze U przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Przekształcenie p nazywa się **immersją w punkcie** $u \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $dp_u : T(\mathbb{R}^m) \to T(\mathbb{R}^n)$ jest monomorfizmem (wtedy w szczególności $m \leqslant n$). Przekształcenie p nazywa się **immersją**, jeśli jest immersją w każdym punkcie $u \in U$.

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), matematyk pochodzenia żydowskiego, wykładał w Berlinie i Królewcu, jeden z twórców teorii funkcji eliptycznych. Publikował prace także z teorii liczb, równań różniczkowych cząstkowych i mechaniki analitycznej. Wyznacznik zwany dzisiaj jakobianem rozpatrywał już wcześniej A. Cauchy.

1.8. Przykład. Przekształcenie $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $r(t) = (\cos t, \sin t)$ dla $t \in \mathbb{R}$ jest immersją.

1.9. Przykład. Jeśli $n \geqslant m$, to włożenie $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ określone wzorem $i(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ jest immersją.

1.10. Twierdzenie (o immersji). Jeżeli $p : U \to \mathbb{R}^n$ jest immersją w punkcie $u \in U$, to istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$ określony na otoczeniu W punktu $p(u)$ w $\mathbb{R}^n$, że $(\Phi \circ p)(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$ dla $(u_1, \dots, u_m)$ należących do pewnego otoczenia U_0 punktu u w $\mathbb{R}^m$ (rys. 1.1).



Rys. 1.1

Dowód. Skoro p jest immersją w u, to rząd macierzy $p'(u)$ jest równy m, więc pewna kwadratowa podmacierz stopnia m macierzy $p'(u)$ jest nieosobliwa. Można założyć, że jest to podmacierz złożona z pierwszych m wierszy (w przeciwnym wypadku złożylibyśmy p z dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ zmieniającym kolejność współrzędnych). Definiujemy przekształcenie $\Psi : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ wzorem

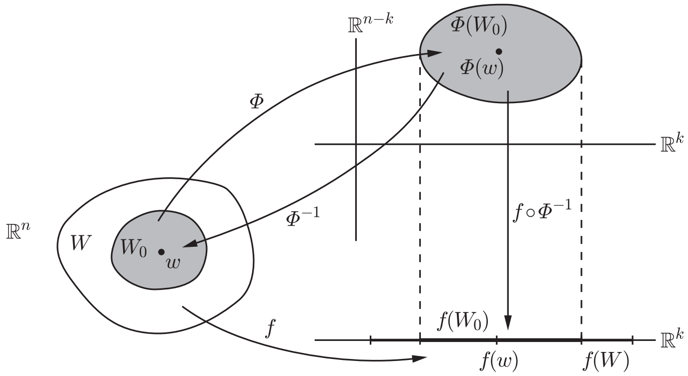
$$\Psi(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n) := p(u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=m+1}^{n} u_i e_i.$$

Jak łatwo sprawdzić, jakobian $J\Psi(u, 0) \neq 0$, więc z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym (1.6.) wynika, że Ψ przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie punktu $(u, 0)$ na pewne otoczenie W punktu $p(u)$. Wtedy $\Phi = \Psi^{-1}$ przekształca dyfeomorficznie W na $\Phi(W)$ oraz $(\Phi \circ p)(u_1, \dots, u_m) = (\Psi^{-1} \circ \Psi)(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0) = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$, gdy tylko $(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0) \in \Phi(W)$. Za U_0 można przyjąć jakiekolwiek otoczenie punktu u zawarte w zbiorze $\{(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0) \in \Phi(W)\}$. $\square$

1.11. Definicja. Niech $f : W \to \mathbb{R}^k$ będzie gładkim przekształceniem określonym na otwartym podzbiorze W przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Przekształcenie f nazywa się **submersją w punkcie** $w \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $df_w : T(\mathbb{R}^n) \to T(\mathbb{R}^k)$ jest epimorfizmem (wtedy w szczególności $n \geqslant k$). Przekształcenie f nazywa się **submersją**, jeśli jest submersją w każdym punkcie $w \in W$.

1.12. Przykład. Jeśli $n \geqslant k$, to rzut $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ określony wzorem $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$ jest submersją.

1.13. Twierdzenie (o submersji). Jeżeli $f : W \to \mathbb{R}^k$ jest submersją w punkcie $w \in W$, to istnieje dyfeomorfizm $\Phi : W_0 \to \Phi(W_0) \subset \mathbb{R}^n$ określony na otoczeniu $W_0 \subset W$ punktu w w $\mathbb{R}^n$ taki, że $(f \circ \Phi^{-1})(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_k)$ dla $(y_1, \ldots, y_n) \in \Phi(W_0)$ (rys. 1.2).



Rys. 1.2

Dowód. Skoro f jest submersją w w, to rząd macierzy $f'(w)$ jest równy k, więc pewna kwadratowa podmacierz stopnia k macierzy $f'(w)$ jest nieosobliwa. Tym razem można założyć, że jest to podmacierz złożona z pierwszych k kolumn. Definiujemy przekształcenie $\Phi : W \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$ wzorem

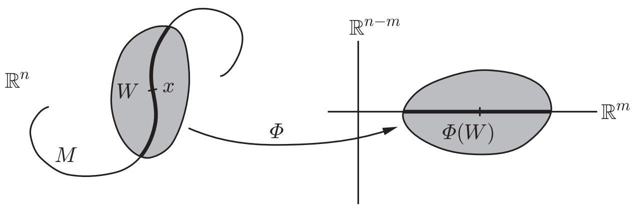
$$\Phi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) := \\ := (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Jak łatwo sprawdzić, znowu jakobian $J\Phi(w) \neq 0$, więc z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym (1.6.) wynika, że Φ przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie W_0 punktu w na $\Phi(W_0)$. Jeżeli $(y_1, \ldots, y_n) \in \Phi(W_0)$ i $(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$, to

$$(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \\ = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Zatem $(f \circ \Phi^{-1})(y_1, \ldots, y_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_k)$. $\square$

1.14. Definicja. Niepusty podzbiór M przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ nazywamy ***m*-wymiarową podrozmaitością** (lub krócej **rozmaitością**) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in M$ istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ określony na pewnym otoczeniu W punk-



Rys. 1.3

tu x w $\mathbb{R}^n$, że $M \cap W = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Obcięcie $\phi : W \cap M \to \phi(W \cap M) \subset \mathbb{R}^m$ dyfeomorfizmu Φ nazywamy **lokalnym układem współrzędnych** lub **mapą** na podrozmaitości M (rys. 1.3).

1.15. Uwaga. Rozmaitości 1-wymiarowe nazywamy **krzywymi gładkimi**, a rozmaitości 2-wymiarowe — **powierzchniami gładkimi**.

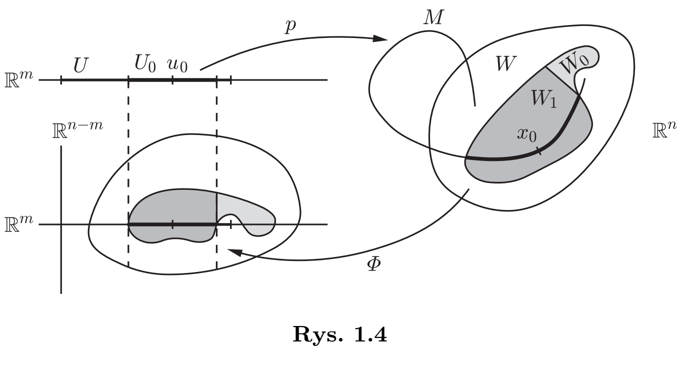
Niżej podamy trzy naturalne charakteryzacje rozmaitości.

1.16. Definicja. Immersja $p : U \to \mathbb{R}^n$ podzbioru otwartego U w $\mathbb{R}^m$, która jest homeomorfizmem U na zbiór $p(U)$ rozpatrywany z topologią indukowaną z $\mathbb{R}^n$, nazywa się **parametryzacją** zbioru $p(U)$. Zbiór $p(U)$ nazywa się wtedy m-wymiarowym **płatem**.

1.17. Stwierdzenie. Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in M$ istnieje parametryzacja pewnego otoczenia x_0 w M.

Dowód. $\Longrightarrow$: Dla x_0 istnieje otoczenie W i taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$, że $M \cap W = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Wtedy tezę spełnia $p := \Phi^{-1}|_{\Phi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})}$.

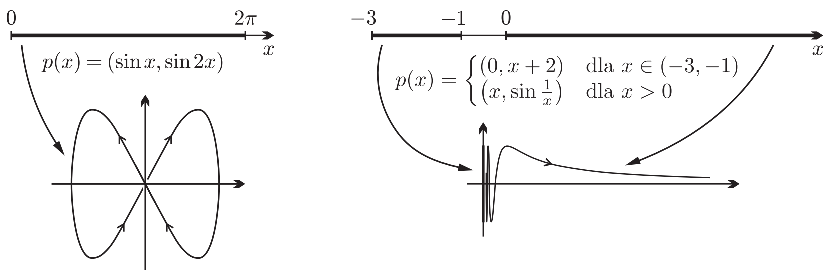
$\Longleftarrow$: Niech $p : U \to p(U)$ będzie daną parametryzacją, $x_0 = p(u_0)$. Z twierdzenia o immersji (1.10.) wynika, że istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$ pewnego otoczenia W punktu $x_0 = p(u_0)$ w $\mathbb{R}^n$, że



Rys. 1.4

$(\Phi \circ p)(u) = (u, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$ dla u należących do pewnego podzbioru otwartego $U_0 \subset U$. Wykażemy, że dyfeomorfizm Φ obcięty do pewnego otoczenia punktu x_0 spełnia warunek występujący w definicji rozmaitości (rys. 1.4). Ponieważ p jest homeomorfizmem U na $p(U)$, więc istnieje takie otoczenie $W_0 \subset W$ punktu x_0 w $\mathbb{R}^n$, że $p(U_0) = M \cap W_0$ (bo topologia na $p(U)$ jest indukowana z $\mathbb{R}^n$). Na ogół zbiór W_0 jest jeszcze za duży (zachodzi inkluzja $M \cap W_0 \subset \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$, ale nie musi zachodzić inkluzja przeciwna). Rozpatrzmy $W_1 = W_0 \cap \Phi^{-1}(U_0 \times \mathbb{R}^{n-m})$. Wtedy W_1 jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ oraz $M \cap W_1 = M \cap W_0 = p(U_0)$. Zamiast Φ rozpatrzmy $\Phi_1 = \Phi|_{W_1}$. Mamy teraz $p(U_0) = M \cap W_1 \subset \Phi_1^{-1}(U_0 \times \{0\})$. Inkluzja $\Phi_1^{-1}(U_0 \times \{0\}) \subset p(U_0)$ wynika z różnowartościowości Φ_1, zatem $M \cap W_1 = \Phi_1^{-1}(U_0 \times \{0\}) = \Phi_1^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. □

1.18. Uwaga. Jeśli p jest różnowartościową immersją, to $p(U)$ nie musi być podrozmaitością. Przykładem może być „ósemka" (rys. 1.5), która jest obrazem immersji $p : (0, 2\pi) = U \to p(U) \subset \mathbb{R}^2$ danej wzorem $p(x) = (\sin x, \sin 2x)$. Innym przykładem jest tzw. **warszawska sinusoida** (rys. 1.5), czyli obraz immersji $p : (-3, -1) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ danej wzorem $p(x) = (x, \sin \frac{1}{x})$ dla $x > 0$ oraz $p(x) = (0, x + 2)$ dla $x \in (-3, -1)$.

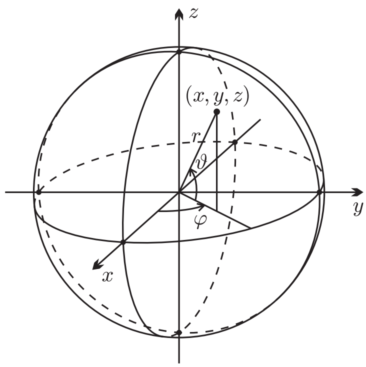


Rys. 1.5

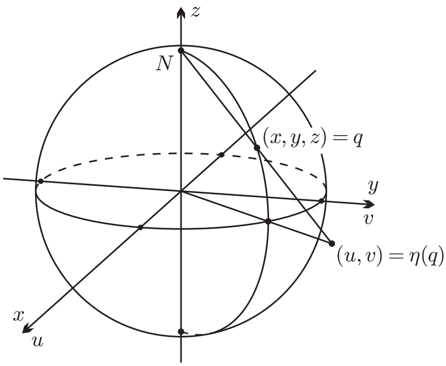
1.19. Wniosek. Płaty są podrozmaitościami. Podrozmaitości można parametryzować lokalnie.

1.20. Przykład. Funkcja $p : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ określona wzorem $p(\varphi, \vartheta) = (r \cos\vartheta \cos\varphi, r \cos\vartheta \sin\varphi, r \sin\vartheta)$ to tzw. **parametryzacja sferyczna** (płata na sferze o promieniu r w $\mathbb{R}^3$, rys. 1.6). Odwzorowanie p jest homeomorfizmem, bo można je rozszerzyć do dyfeomorfizmu zbioru otwartego $(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zmiennych (r, φ, ϑ), danego podanym wzorem na podzbiór otwarty $\mathbb{R}^3$ (współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^3$). Przekształcenie odwrotne przyporządkowuje punktowi sfery jego **współrzędne sferyczne**: długość geograficzną φ i szerokość geograficzną ϑ. Obrazem parametryzacji sferycznej jest sfera bez jednego południka.

1.21. Przykład. Sferę bez jednego punktu można sparametryzować przy użyciu tzw. rzutu stereograficznego. Niech $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ oznacza sferę o promieniu 1



Rys. 1.6



Rys. 1.7

i środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i niech $N = (0, 0, 1)$ (rys. 1.7). Niech $q \in S^2$ będzie dowolnym punktem różnym od N. Punkty q i N wyznaczają prostą w $\mathbb{R}^3$, jej punkt przecięcia z płaszczyzną P opisaną równaniem $z = 0$ oznaczmy przez $\eta(q)$. Przekształcenie $\eta : S^2 \setminus \{N\} \to P$ określone w ten sposób nazywa się **rzutem stereograficznym** i we współrzędnych ma postać $\eta(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}, 0\right)$. Przekształcenie $p : \mathbb{R}^2 \to S^2$ określone wzorem $p(u, v) = \eta^{-1}(u, v, 0)$ dla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ma we współrzędnych postać $p(u, v) = \left(\dfrac{2u}{u^2+v^2+1}, \dfrac{2v}{u^2+v^2+1}, \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$ i jest parametryzacją sfery S^2 bez punktu N. (W wielu książkach płaszczyznę rzutowania (tutaj P) sytuuje się tak, by była ona styczna do sfery w punkcie przeciwległym do punktu, z którego się rzutuje (tutaj N).)

1.22. Stwierdzenie. Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in M$ istnieje taka submersja $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ określona na pewnym otoczeniu W punktu x w $\mathbb{R}^n$, że $M \cap W = f^{-1}(0)$.

Dowód. $\Longrightarrow$: Bierzemy $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ z definicji podrozmaitości i kładziemy $f := \pi \circ \Phi$, gdzie $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ jest rzutem na drugi czynnik kartezjański.

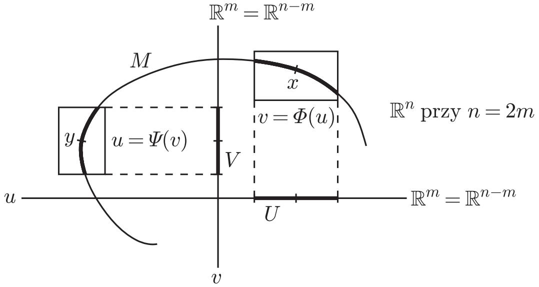
$\Longleftarrow$: Rozpatrzmy submersję f. Z twierdzenia o submersji (1.13.) wynika, że istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W_0 \to \Phi(W_0) \subset \mathbb{R}^n$, określony na pewnym otoczeniu $W_0 \subset W$ punktu $x \in \mathbb{R}^n$, że $(f \circ \Phi^{-1})(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = (y_{m+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Na W_0 mamy zatem $f = \pi \circ \Phi$ oraz $M \cap W_0 = f^{-1}(0) = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. □

1.23. Uwaga. Przeciwobraz $f^{-1}(b)$ punktu $b \in B$ przy przekształceniu $f : A \to B$ będziemy nazywać **włóknem** przekształcenia f nad punktem b. Powyższe stwierdzenie możemy zatem sformułować w sposób następujący: podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy M lokalnie jest włóknem submersji określonej na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^n$.

1.24. Wniosek. Jeśli $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ jest submersją określoną na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$, to niepuste włókna $f^{-1}(y)$ są m-wymiarowymi podrozmaitościami $\mathbb{R}^n$.

1.25. Przykład. Sfera w $\mathbb{R}^3$ o środku 0 i promieniu r jest włóknem submersji $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1$ określonej wzorem $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ nad punktem 0.

1.26. Stwierdzenie. Niepusty podzbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in M$ posiada takie otoczenie w M, które jest wykresem gładkiej funkcji $\Phi : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^{n-m}$, przy czym $\mathbb{R}^m$ oraz $\mathbb{R}^{n-m}$ oznaczają podprzestrzenie $\mathbb{R}^n$ rozpięte na odpowiednio dobranych osiach układu współrzędnych, a $U \subset \mathbb{R}^m$ jest podzbiorem otwartym (rys. 1.8).



Rys. 1.8

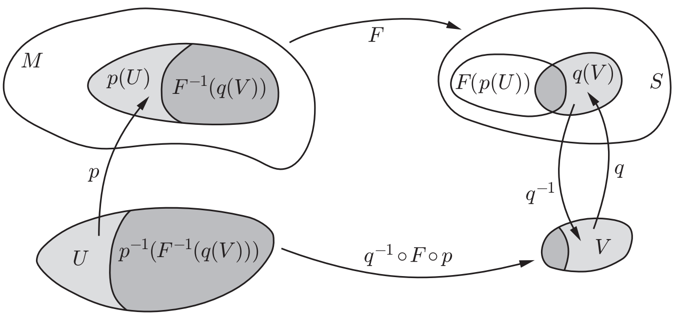
Dowód. $\Longrightarrow$: Submersję z poprzedniego stwierdzenia można traktować jako układ równań opisujący podrozmaitość M, którego macierz pochodnych cząstkowych ma rząd $n-m$. Teza wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

$\Longleftarrow$: Zostawiamy jako ćwiczenie. Zarówno parametryzacja wykresu funkcji gładkiej, jak i jego przedstawienie w postaci włókna submersji, są bardzo łatwe. $\square$

1.27. Przykład. Otwarty podzbiór (górna półsfera) sfery w $\mathbb{R}^3$ o środku 0 i promieniu r jest wykresem funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ na kole $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$.

Wprowadzimy teraz pojęcie przekształcenia gładkiego pomiędzy podrozmaitościami. Dwie możliwości wydają się naturalne: jedna w terminach parametryzacji podrozmaitości, druga — w terminach obcięć przekształceń gładkich przestrzeni afinicznych, w których te podrozmaitości są zawarte. Okazuje się, że obie drogi prowadzą do tego samego celu.

1.28. Definicja. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ i $S \subset \mathbb{R}^k$ będą podrozmaitościami wymiarów odpowiednio m i s, a $F : M \to S$ — dowolnym przekształceniem ciągłym. F nazywa się **przekształceniem gładkim** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej parametryzacji $p : U \to p(U)$ zbioru $p(U)$ otwartego w M i dla dowolnej parametryzacji $q : V \to q(V)$ zbioru $q(V)$ otwartego w S złożenie $q^{-1} \circ F \circ p \; : p^{-1}(F^{-1}(q(V))) \to V \subset \mathbb{R}^s$ określone na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^m$ jest przekształceniem gładkim. Funkcja $q^{-1} \circ F \circ p$ nazywa się **lokalnym przedstawieniem** F przy parametryzacjach p i q (lub w mapach p^{-1} i q^{-1}) (rys. 1.9).



Rys. 1.9

1.29. Lemat. Jeśli $U \subset \mathbb{R}^m$ jest podzbiorem otwartym, $p : U \to p(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest parametryzacją, a $x_0 = p(u_0)$, to istnieje otoczenie U_0 punktu u_0 w U oraz gładkie rozszerzenie $f : W \to U_0$ przekształcenia $(p|_{U_0})^{-1}$ określone na otoczeniu W punktu x_0 w $\mathbb{R}^n$.

Dowód. Z twierdzenia o immersji (1.10.) wynika, że istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n$, że $(\Phi \circ p)(u) = (u, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ dla $u \in U_0$.

Niech $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ będzie rzutem na pierwszy czynnik kartezjański. Wtedy $\pi \circ \Phi \circ p$ jest identycznością na U_0 i $f := \pi \circ \Phi$ jest gładkim rozszerzeniem $(p|_{U_0})^{-1}$. □

1.30. Stwierdzenie. Przekształcenie $F : M \to S$ rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ w $S \subset \mathbb{R}^k$ jest gładkie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in M$ istnieje otoczenie W tego punktu w $\mathbb{R}^n$ oraz rozszerzenie gładkie $\overline{F} : W \to \mathbb{R}^k$ obcięcia $F|_{M\cap W}$.

Dowód. Niech $p : U \to p(U) \subset M$ i $q : V \to q(V) \subset S$ będą parametryzacjami, $p(u_0) = x_0, q(v_0) = F(x_0) = y_0$. Niech g i h będą rozszerzeniami gładkimi przekształceń $(p|_{U_0})^{-1}$ i odpowiednio $(q|_{V_0})^{-1}$, o których jest mowa w lemacie.

$\Longrightarrow$: Z założenia $q^{-1} \circ F \circ p$ jest gładkie, więc również $\overline{F} = q \circ h \circ F \circ p \circ g$ jest gładkie na otoczeniu W punktu x_0 w $\mathbb{R}^n$ i $\overline{F}|_{M\cap W} = F|_{M\cap W}$.

$\Longleftarrow$: $q^{-1} \circ F \circ p \ = h \circ \overline{F} \circ p$ jest gładkie jako złożenie przekształceń gładkich między zbiorami otwartymi przestrzeni afinicznych. □

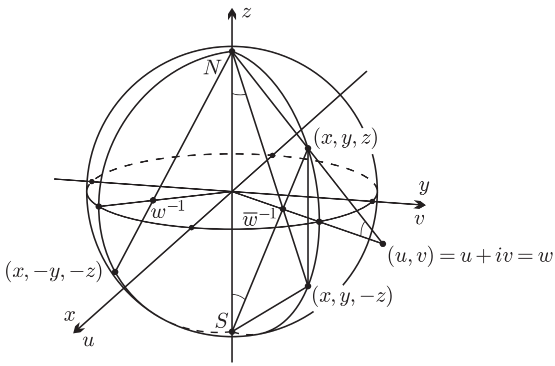
Zarówno z definicji jak i z ostatniego stwierdzenia wynikają następujące własności przekształceń gładkich.

1.31. Wniosek. Złożenie przekształceń gładkich jest przekształceniem gładkim. Przekształcenie gładkie w sensie przestrzeni afinicznych, którego obraz jest zawarty w rozmaitości M, jest gładkie jako przekształcenie rozmaitości.

1.32. Definicja. Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $F : M \to S$ rozmaitości M na rozmaitość S nazywamy **dyfeomorfizmem rozmaitości** wtedy i tylko wtedy, gdy oba przkształcenia F i F^{-1} są gładkie. Rozmaitości M i S są **dyfeomorficzne**, jeśli istnieje dyfeomorfizm przekształcający M na S.

1.33. Wniosek. Dowolne dwie rozmaitości tego samego wymiaru są lokalnie dyfeomorficzne, tzn. każdy punkt jednej rozmaitości ma otoczenie dyfeomorficzne z pewnym otoczeniem wybranego punktu drugiej rozmaitości.

1.34. Przykład. Niech $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ oznacza bijekcję przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ze zbiorem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych określoną wzorem $b(u, v) = u + iv$, niech $p : \mathbb{R}^2 \to S^2$ oznacza parametryzację części sfery pochodzącą od rzutu stereograficznego (1.21.) i niech $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$. Niech przekształcenie $j : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie zadane wzorem $j(w) = w^{-1}$ dla $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (rys. 1.10). Nietrudno jest sprawdzić, że odpowiadające mu na sferze przekształcenie $I = p \circ b^{-1} \circ j \circ b \circ p^{-1} : S^2 \setminus \{N, S\} \to S^2 \setminus \{N, S\}$ jest symetrią sfery względem osi x. Kładąc $I(N) = S$, $I(S) = N$, rozszerzamy I do symetrii całej sfery. Oczywiście I rozszerza się do symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (która jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^3$), a więc I jest dyfeomorfizmem sfery.



Rys. 1.10

1.35. Przykład. Przyjmujemy oznaczenia z poprzedniego przykładu (rys. 1.10). Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie dowolnym wielomianem o współczynnikach zespolonych. Wielomian f, podobnie jak poprzednio przekształcenie j, wyznacza (poprzez rzut stereograficzny) gładkie przekształcenie sfery S^2 bez punktu N. Oznaczmy je przez g, tzn. $g = p \circ b^{-1} \circ f \circ b \circ p^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to S^2 \setminus \{N\}$. Wykażemy, że g rozszerza się do gładkiego przekształcenia całej sfery w siebie. Jeśli wielomian f jest stały, to wyznacza stałe (więc gładkie) przekształcenie sfery. Załóżmy, że f jest dodatniego stopnia n. Określamy $g(N) = N$. Wystarczy sprawdzić gładkość g w otoczeniu punktu N. Skorzystamy z dyfeomorfizmu $I : S^2 \to S^2$ z poprzedniego przykładu. Mianowicie, przekształcenie g jest gładkie w otoczeniu N wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $I^{-1} \circ g \circ I$ jest gładkie w otoczeniu S. Ponieważ p jest parametryzacją, ten warunek jest równoważny gładkości w otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{C}$ funkcji $j^{-1} \circ f \circ j$ dodatkowo przeprowadzającej 0 na 0, a ta wynika z tego, że $w \mapsto (j^{-1} \circ f \circ j)(w) = \dfrac{1}{f(w^{-1})} = \dfrac{w^n}{w^n f(w^{-1})}$ rozszerza się do funkcji wymiernej zmiennej zespolonej przyjmującej wartość 0 w punkcie 0.

1.36. Definicja. Niech M będzie m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, a x dowolnym punktem M. **Przestrzenią styczną** do rozmaitości M w punkcie x nazywamy zbiór T_xM wszystkich wektorów postaci $\gamma'(0)$, gdzie $\gamma : I \to M$ jest dowolnym przekształceniem gładkim przedziału otwartego $I \subset \mathbb{R}^1$ takim, że $0 \in I$, $\gamma(0) = x$ (rys. 1.11). (Przypomnijmy, że $\gamma'(0) = \lim_{t\to 0}[\gamma(t) - \gamma(0)]/t \in$ $\in T(\mathbb{R}^n)$, więc $T_xM \subset T(\mathbb{R}^n)$).

Interpretacja mechaniczna tej definicji jest następująca. Funkcja $t \mapsto \gamma(t)$ opisuje ruch punktu po rozmaitości M taki, że w chwili $t = 0$ poruszający się punkt znajduje się w x. Wektor $\gamma'(0)$ to wektor prędkości takiego punktu w chwili 0. Przestrzeń styczna składa się zatem z wektorów prędkości wszystkich możliwych poruszających się po M punktów, które w chwili $t = 0$ znajdują się w punkcie x.

1.37. Twierdzenie. Niech M będzie m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$, a x dowolnym punktem M. Niech $p : U \to p(U)$ będzie parametryzacją otoczenia $p(U)$ punktu x w M, $x = p(u)$, a $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ niech będzie taką submersją określoną na otoczeniu W punktu x w $\mathbb{R}^n$, że $M \cap W = f^{-1}(0)$. Wtedy $T_xM = \operatorname{im} dp_u = \ker df_x$.

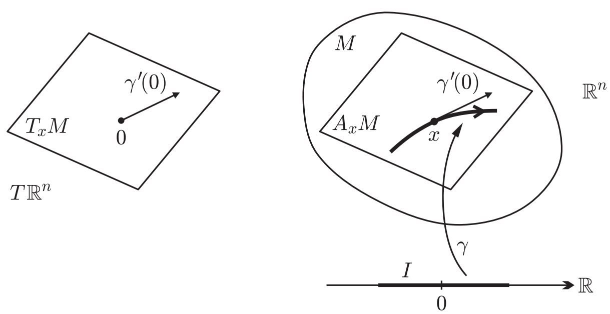
Dowód. Skoro $f \circ p = 0$ (przekształcenie stałe), więc $d(f \circ p)_u = df_x \circ dp_u = 0$ i $\operatorname{im} dp_u \subset \ker df_x$. Skoro dp_u jest monomorfizmem, więc $\dim \operatorname{im} dp_u = m$, a ponieważ df_x jest epimorfizmem, więc $\dim \ker df_x = n - (n - m) = m$. Zatem $\operatorname{im} dp_u = \ker df_x$. Skoro dla dowolnego γ złożenie $f \circ \gamma = 0$, więc $(f \circ \gamma)'(0) = df_x(\gamma'(0)) = 0$ i $\gamma'(0) \in \ker df_x$. Zatem $T_xM \subset \ker df_x$. Wykażemy, że $\operatorname{im} dp_u \subset T_xM$. Rozpatrzmy dowolny wektor $dp_u(w) \in \operatorname{im} dp_u$. Zdefiniujmy $\gamma(t) = p(u + tw)$ i zauważmy, że $\gamma(0) = p(u) = x$, a $\gamma'(0) = dp_u(w)$. Zatem $\operatorname{im} dp_u \subset T_xM$. $\square$

1.38. Wniosek. T_xM jest podprzestrzenią liniową $T(\mathbb{R}^n)$. Obrazy wektorów bazy standardowej $e_1, e_2, \ldots, e_m$ przestrzeni $T(\mathbb{R}^m)$ przy różniczce dp_u parametryzacji p tworzą bazę przestrzeni stycznej T_xM. Będziemy ją oznaczać $p_1(u), p_2(u), \ldots, p_m(u)$. Wektory tej bazy to pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial p}{\partial u_1}(u), \quad \frac{\partial p}{\partial u_2}(u), \ldots, \quad \frac{\partial p}{\partial u_m}(u).$$

Czasem wygodnie jest traktować przestrzeń styczną do rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ jako podzbiór $\mathbb{R}^n$. Dlatego przyjmujemy następujące określenie.

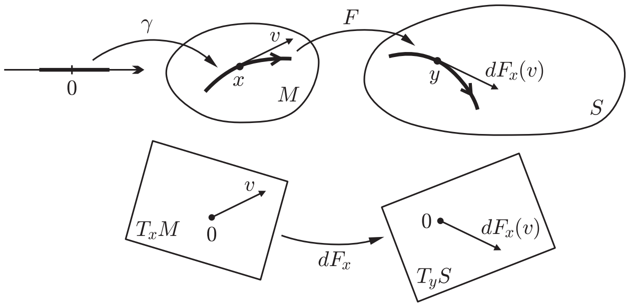
1.39. Definicja. Podprzestrzeń afiniczną $A_xM = x + T_xM$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy **afiniczną przestrzenią styczną** do M w punkcie x (rys. 1.11).



Rys. 1.11

1.40. Uwaga. Niektórzy autorzy wolą traktować przestrzenie styczne do M w różnych punktach jako rozłączne i za przestrzeń styczną do M w x uważają iloczyn kartezjański $\{x\} \times \operatorname{im} dp_x \subset M \times T(\mathbb{R}^n)$.

1.41. Definicja. Niech $F : M \to S$ będzie gładkim przekształceniem rozmaitości, $x \in M, y = F(x)$ i niech $v \in T_xM$ będzie wektorem stycznym do M w punkcie x. Wtedy $v = \gamma'(0)$ dla pewnego przekształcenia gładkiego $\gamma : I \to M$ takiego, że $\gamma(0) = x$. Wzór $dF_x(v) := (F \circ \gamma)'(0)$ określa przekształcenie $dF_x : T_xM \to T_yS$ zwane **różniczką** (lub **przekształceniem stycznym**) **przekształcenia** F **w punkcie** x (rys. 1.12).



Rys. 1.12

1.42. Uwaga. Jeśli W jest otoczeniem punktu x w $\mathbb{R}^n$, a $\overline{F} : W \to \mathbb{R}^k$ jest rozszerzeniem przekształcenia $F|_{M\cap W}$ do przekształcenia gładkiego przestrzeni afinicznych, to $dF_x(v) = d\overline{F}_x(v)$ dla dowolnego wektora $v \in T_xM$. Mianowicie $dF_x(v) = (F \circ \gamma)'(0) = (\overline{F} \circ \gamma)'(0) = d\overline{F}_x(\gamma'(0)) = d\overline{F}_x(v)$. Wynika stąd, że definicja $dF_x(v)$ nie zależy od wyboru γ (bo prawa strona nie zależy) oraz że dF_x jest przekształceniem liniowym.

1.43. Uwaga. Podobnie jak to ma miejsce w przypadku przekształceń przestrzeni afinicznych, różniczka złożenia gładkich przekształceń rozmaitości jest równa złożeniu różniczek tych przekształceń.

1.44. Definicja. Niech M będzie m-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$. Podzbiór $K \subset M$ nazywamy k-wymiarową podrozmaitością M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in K$ istnieje taka mapa $\phi : V \to \phi(V) \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ określona na otoczeniu V punktu x w M, że $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = K \cap V$.

1.45. Stwierdzenie. Niech K będzie podzbiorem m-wymiarowej podrozmaitości M przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:
a) K jest k-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$.
b) K jest k-wymiarową podrozmaitością M.
c) Dla każdego $x \in K$ istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \to \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^{n-m}$ określony na otoczeniu W punktu x w $\mathbb{R}^n$, że $M \cap W = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \times \{0\})$ i $K \cap W = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \{0\})$.

DOWÓD. Pozostawiamy jako ćwiczenie. $\square$

Zadania

1.1. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $\varphi(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ jest dyfeomorfizmem? Jeśli nie, to znajdź maksymalny podzbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$ taki, że $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$ jest dyfeomorfizmem.

1.2. a) Czy istnieje dyfeomorfizm koła (otwartego) na kwadrat (otwarty)?
b) Czy istnieje dyfeomorfizm koła domkniętego na kwadrat domknięty? Dokładniej (por. uwaga 1.2.): czy istnieje dyfeomorfizm pewnego zbioru otwartego w $\mathbb{R}^2$ zawierającego koło domknięte na pewien zbiór otwarty w $\mathbb{R}^2$ zawierający kwadrat domknięty, przy którym obrazem koła będzie kwadrat?

1.3. a) Wskaż przykład immersji $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ niebędącej dyfeomorfizmem.
b) Znajdź przykład immersji $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ niebędącej dyfeomorfizmem.

Wskazówka: rozpatrz np. przekształcenie $p(s,t) = \gamma(t) + e^s\gamma'(t)$, gdzie $\gamma : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ jest odpowiednią krzywą parametryczną w $\mathbb{R}^2$ (por. definicja 2.1.).

1.4. Znajdź zbiór punktów, w których jest immersją przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorem $\varphi(x,y) = (x^2, y^2, (x^2+y^2+1)^2)$.

1.5. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorem $\varphi(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x)$ jest immersją?

1.6. Znajdź zbiór punktów, w których jest submersją przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

1.7. Wykaż, że dla dowolnego przekształcenia gładkiego $g : U \to \mathbb{R}^m$ określonego na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$, zbiór tych punktów $u \in U$, w których g jest a) submersją, b) immersją, jest zbiorem otwartym w U.

1.8. Dane są funkcje gładkie $f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ takie, że zbiór $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = f_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \ldots = f_k(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 0\}$ jest 3-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^5$ i dany jest punkt $p \in M$. Czy z tego wynika, że
a) $k = 2$?
b) rząd macierzy $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(p)$ jest równy 2?
c) istnieją takie funkcje gładkie $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i otoczenie U punktu p w $\mathbb{R}^5$, że $U \cap M = U \cap \{(x_1,x_2,x_3,\varphi(x_1,x_2,x_3),\psi(x_1,x_2,x_3)) : (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\}$?
d) istnieje taka funkcja gładka $F : U \to \mathbb{R}$ określona na pewnym otoczeniu U punktu p w $\mathbb{R}^5$, że $M \cap U \subset F^{-1}(0)$ oraz $\mathrm{grad}F(p) \neq 0$?
e) istnieje taka immersja $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, że $f_i(\varphi(x_1,x_2,x_3)) = 0$ dla wszystkich $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ i wszystkich $i = 1,\ldots,k$?

1.9. Wykaż, że są podrozmaitościami $\mathbb{R}^3$ następujące zbiory:
a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + zx = -1,\ xyz = 1\}$,
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^3 + z^4 = 2,\ x^2 + z = 2\}$,
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy - 4yz - 8z^2 - 4z + 2y = 0,\ xz = 1\}$,
d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z^2 - 3,\ yz = x + x^2\}$.

Wskazówka: przedstaw te podzbiory jako włókna pewnych submersji (niekoniecznie określonych na całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$).

1.10. Wykaż, że są podrozmaitościami $\mathbb{R}^{n^2}$ następujące grupy macierzy:
a) $SL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} : \det A = 1\}$.
b) $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} :\ A^T \cdot A = I\}$.

1.11. Wykaż, że **cykloida** $C = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in \mathbb{R}\}$ (rys. 2.6a) nie jest podrozmaitością $\mathbb{R}^2$.

Wskazówka: I sposób: Wykaż, że C w otoczeniu punktu $(0, 0)$ nie jest wykresem żadnej funkcji gładkiej.
II sposób: Każde przekształcenie f klasy co najmniej C^2 określone na otoczeniu punktu $(0, 0)$ w $\mathbb{R}^2$ i o wartościach rzeczywistych można zapisać w postaci

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot y + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot y^2\right] + (x^2 + y^2) \cdot \Psi(x, y),$$

gdzie Ψ jest pewną funkcją ciągłą w $(0, 0)$ i spełniającą warunek $\Psi(0, 0) = 0$. Zastosuj powyższy fakt do wykazania, że żadne otoczenie $(0, 0)$ w C nie leży we włóknie żadnej submersji.

1.12. Jakie przykłady podrozmaitości otrzymamy, ustalając wartości niektórych współrzędnych w układach współrzędnych a) biegunowych, b) cylindrycznych, c) sferycznych?

1.13. Znajdź opis **torusa** w $\mathbb{R}^3$ (czyli powierzchni obrotowej powstałej przez obrót okręgu wokół osi leżącej w płaszczyźnie okręgu i nieprzecinającej tego okręgu) za pomocą równania i za pomocą parametryzacji możliwie dużego podzbioru otwartego, por. rys. 6.3. Zrób to samo dla powierzchni w $\mathbb{R}^3$ otrzymanej przez obrót wokół osi z dowolnej krzywej leżącej w płaszczyźnie xz.

1.14. Znajdź taką parametryzację p paraboloidy hiperbolicznej opisanej równaniem $z = x^2 - y^2$, przy której **linie współrzędnych** $p(s_0, t)$ i $p(s, t_0)$ są prostymi.

1.15. Znajdź dyfeomorfizm okręgu $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ na rozmaitość $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$.

1.16. Wykaż, że $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 z,\ y \neq 0\}$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^3$ i znajdź te punkty $m \in M$, dla których $A_m M \ni (0, 0, 1)$.

1.17. Źródło światła znajduje się w punkcie $(1, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$. Przedstaw brzeg oświetlonej części paraboloidy $z + x^2 + y^2 = 0$ na tej paraboloidzie jako obraz odpowiedniej immersji $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

1.18. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y\}$, $p = (0, a, \pi)$, $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że M jest powierzchnią gładką. Znajdź równanie afinicznej płaszczyzny stycznej do M w punkcie p.

1.19. Wykaż, że $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{|z|} = x^2 + y^2 + 1\}$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^3$. Znajdź parametryzację podzbioru otwartego M. Znajdź układ współrzędnych y_1, y_2, y_3 na pewnym zbiorze otwartym $W \subset \mathbb{R}^3$ taki, że $M \cap W = \{w \in W : y_3(w) = 0\}$. Czy istnieją takie dwa różne punkty w M, w których afiniczne przestrzenie styczne są równe?

1.20. Czy na paraboloidzie hiperbolicznej $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ istnieją takie dwa różne punkty, w których afiniczne przestrzenie styczne są równoległe?

1.21. Rozważmy paraboloidę hiperboliczną $H = \{(x, y, z) : xy = z\} \subset \mathbb{R}^3$. Czy dla każdego punktu $p \in H$
a) różniczka $d\pi_p$ rzutu $\pi : H \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ wzdłuż osi z jest monomorfizmem?
b) różniczka $d\varrho_p$ rzutu $\varrho : H \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ wzdłuż płaszczyzny xy jest epimorfizmem?

1.22. Dana jest rozmaitość $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}: x^2+xy^2-z^3=y,\ x^2 = yz^2\}$. Czy afiniczna prosta styczna do M w punkcie $(1, 1, 1)$ przecina M poza tym punktem?

1.23. Wykaż, że wszystkie afiniczne przestrzenie styczne do powierzchni opisanej równaniem $z = x \cdot \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, gdzie ϕ jest dowolną funkcją gładką, przechodzą przez punkt $(0, 0, 0)$. Jak geometrycznie uzasadnić ten fakt?

1.24. Znajdź te punkty powierzchni opisanej równaniem $z = x^4 - 2xy^3$, w których płaszczyzny styczne są prostopadłe do wektora $[-2, 6, 1]$.

1.25. Wykaż, że $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2\}$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^3$. Czy $(M \cap A_pM) \setminus \{p\}$ jest krzywą gładką, jeśli $p = (1, 1, 1)$?

1.26. Mówimy, że dwie podrozmaitości M i N przestrzeni $\mathbb{R}^k$ przecinają się **transwersalnie** w punkcie $p \in M \cap N$, jeśli $T_pM + T_pN = T(\mathbb{R}^k)$. M i N przecinają się transwersalnie, jeśli przecinają się transwersalnie w każdym punkcie $p \in M \cap N$. Wykaż, że jeśli podrozmaitości M i N przestrzeni $\mathbb{R}^k$ przecinają się transwersalnie, to $M \cap N$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^k$.

1.27. Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie powierzchnią gładką, $p \in M$ dowolnym punktem i niech H będzie dowolną płaszczyzną afiniczną zawierającą punkt p. Wykaż, że jeśli $M \cap H = \{p\}$, to $H = A_pM$.