

RODZINNA MATEMATYKA



RODZINNA MATEMATYKA

Łamigłówki, które rozwijają i bawią

Kamila Łyczek

RODZINNA MATEMATYKA

Łamigłówki, które rozwijają i bawią



Projekt okładki i stron tytułowych **Bartosz Dobrowolski**

Wydawca **Katarzyna Włodarczyk-Gil**

Redaktor prowadzący **Renata Ziółkowska**

Redaktor **Agnieszka Chmieleńska**

Koordynator produkcji **Mariola Grzywacka**

Projekt graficzny wnętrza, skład i łamanie **Bartosz Dobrowolski**

Ilustracje: **Kamila Łyczek; Bartosz Dobrowolski; Marek Goebel;**

Shutterstock/Matthew Cole, vipphotos, hunthomas, Ivana Slana, rassco, Krylovochka, edel, Gorban, grmarc, kuroksta, olillia, Scherbinka, chereshneva, Tsibii Lesia, Boo-tique Illustration, Oleg7799, Ovocheva, Nemanja Cosovic, PinkPueblo, Olia Fedorovsky, Julia Tim, judilyn, jazzia, Incomible; **Fotolia**/polygraphus, Flixelpix; **Depositphotos**/martinan

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujemy cudzą własność i prawo

Więcej na www.legalnakultura.pl

Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Warszawa 2015

ISBN 978-83-01-18306-6

Wydanie I – 1 dodruk

Warszawa 2016

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2

tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288

infolinia 801 33 33 88

e-mail: pwn@pwn.com.pl

www.pwn.pl

Druk i oprawa: Drogowiec-PL, Kielce

Spis treści

Wstęp 7

Kolorowe kółeczka i dziwna mapa 10

1. Okręty 10
2. Co dalej? 12
3. Kolorowe sudoku 14
4. Wypełnij kwadrat 15
5. Indianie 15
6. Matematyczna kawiarenka 17
7. Pary klocków 19
8. Magiczne Nasiona 20
9. Konstruktor 21
10. Krążkowa kasa 23
11. Czary-mary 26
12. Arytmetyczna sałatka z krążków 28
13. Obrazki 29
14. Symetria 30
15. Wieże 31
16. Zadania z kwadratem 33
17. Gra w 13 krążków 35
18. Lustrzane odbicie – mozaika 35
19. Doświadczenie z kapeluszem 36
20. Wszystkie strony są równe 37
21. Zapasy wiewiórki 37
22. Miasteczko Trójkątowo 38
23. Skrzyżowania 39
24. Pewna ciekawa gra (dla dwóch osób) 40
25. Dżdżownice 42
26. Łodziarnie 44
27. Trawniki 44
28. Cztery strony 45
29. Cztery strony – gra dla dwóch osób 47
30. Wycieczka 47
31. Trasa I 48
32. Trasa II 49
33. 10 pytań – gra dla dwóch lub więcej osób 49
34. Wieżyczki 50

Zaczarowana Dolina 52

1. Rodzinne zdjęcie siedmiu krasnoludków 52
2. Skarpetki Marysi 53
3. Kurs pociągami po lesie 53
4. Numery wagonów 54
5. Nowe wagony 54

6. Kraina dwóch monet 54
7. Zaczarowana autostrada 55
8. Mechanizm starego zegara 56
9. Nowe mebelki Królowy Śnieżki 56
10. Dziwny domek Baby Jagi 57
11. Spiralne wzory z kwiatów 57
12. Na oko 58
13. Dziwna komnata 58
14. Cyrkowe przedstawienie 59
15. Leśne skrzaty 60
16. Zbiór przedmiotów 61
17. Trasa smoka 62
18. Wypieki Czerwonego Kapturka 63
19. Krowy w farbie 63
20. Kółko i krzyżyk 64
21. Kafelki 64
22. Prognoza pogody 65
23. Plan chatki 66
24. Tworzenie mapy 67
25. Spacer po domku Baby Jagi 68
26. Po drugiej stronie lustra 68
27. Żółwie zebrania 70
28. Przelewanki 71
29. Krasnal zawsze mówiący prawdę 72
30. Zagubiona złota rybka 72

Zima 74

1. Symetryczne śnieżynki 74
2. Rysujemy płatki 75
3. Kosze ze śnieżkami 75
4. Rzuty na odległość 76
5. Drabina świętego Mikołaja 76
6. Wizyta u matematyków 76
7. Prezenty od Mikołaja 77
8. Bombkowe zaopatrzenie 77
9. Książki Hani 77
10. Co dalej? 78
11. Koncert kolęd 79
12. Cukierkowa choinka 79
13. Co dalej? 80
14. Loteria 81
15. Loteria II 81
16. Schowane bombki 81

17. Odwiedziny w ferie **81**
18. Co dalej? **82**
19. Jasełka szkolne **82**
20. Bałwany śnieżne **83**
21. Drzewo genealogiczne **83**
22. Woda, lód, para wodna **84**

Przepysanie 86

1. Stwórz tabliczkę czekolady **86**
2. Wariacje na temat kształtów tabliczek I **86**
3. Wariacje na temat kształtów tabliczek II **87**
4. Wariacje na temat kształtów tabliczek III **87**
5. Wariacje na temat kształtów tabliczek IV **87**
6. Trójkątna tabliczka **88**
7. Jeszcze większa trójkątna tabliczka **88**
8. Waga szalkowa **89**
9. Ważenia ciąg dalszy **91**
10. Skomplikowane ważenie **91**
11. Co to za monety? **92**
12. Chłopcy łasuchy **92**
13. Urodziny trojaczek **92**
14. Czekoladki w pudełkach **92**
15. Kompozycja z ciast **93**
16. niesprawiedliwość **93**

W lesie 94

1. Leśny dywan **94**
2. Muchomory **95**
3. Co dalej? **97**
4. Zagubiona stonoga **98**
5. Patykowa lekcja arytmetyki **99**
6. Głodny ślimak **100**
7. Wielkie domy **101**
8. Dorodne dęby **101**
9. Zakręcone wąsy leśniczych **101**
10. Gęsty las **101**
11. Owadzia polana **102**
12. Dziwne słoiki w starej chatce **102**
13. Krecia robota **102**
14. Sadržawka **103**
15. Więcej, mniej **103**
16. Rybie przysmaki **104**
17. Rodzina pszczół **105**
18. Leśny spacer **106**
19. Szyfrowany zamek **106**

Szalone kształty 108

1. Kropki, kratki, paski **108**
2. Co dalej? **110**
3. Trójkąty w gwieździe **111**
4. Składanie kartki **111**
5. Składanie kartki II **111**
6. Trasa listonosza **112**
7. Dzień Babci **113**
8. Dzień Dziadka **114**
9. Dzielenie ciasta cd. **115**
10. Dwa kolory, dwa kształty, dwa wypełnienia, dwa rodzaje **115**
11. Klocków ciąg dalszy **116**
12. Klocki nie do pary **117**
13. Klocki do pary **117**
14. Cztery różnice **118**
15. Bałagan **119**
16. Tetromino **120**
17. Potężne konstrukcje Tetromino **121**
18. Większa kopia Tetromino **122**
19. Konstrukcje Tetromino II **122**
20. Geometryczny robot **123**
21. Kolorowe kropki **124**
22. Prostokątnie **125**
23. Wspólna cecha **126**
24. Puzzle **127**
25. Wzory domino **128**
26. Zapalczane kwadraty **129**
27. Rybka z zapalek **129**
28. Trójkąty z zapalek **129**
29. Żyrafa **129**
30. Zapalczane wyzwania **130**
31. Co ja tam mam? **131**
32. Ciach w czworokąt **131**

Odpowiedzi 132

- Część I: Kolorowe kółeczka i dziwna mapa **132**
- Część II: Zaczarowana Dolina **146**
- Część III: Zima **153**
- Część IV: Przepysanie **158**
- Część V: W lesie **162**
- Część VI: Szalone kształty **166**

Jak wielką matematykę może uprawiać sześciolatek, siedmiolatek, czy ósmiólatek? Jeżeli myślisz, że wyliczanie coraz większych liczb to szczyt jego możliwości, jesteś w grubym błędzie.

Matematyka to porównywanie, porządkowanie, analizowanie, logiczne myślenie, uogólnianie, precyzyjne opisywanie i wiele innych umiejętności, które warto w dziecku pielęgnować i rozwijać.

Ta książka właśnie temu ma służyć.

Wspólnie ze swoją pociechą przeniescie się w świat matematycznych zagadek i przygód. Twoja pomoc będzie nieodłączna – stań na wysokości zadania! Niech przyświeca Ci myśl Konfucjusza:

Słyszałem i zapomniałem.

Widziałem i zapamiętałem.

Zrobiłem i zrozumiałem.

*Kierując się tymi słowami,
pamiętaj*

1. To co dziecko odkryje (rozwiąże, wymyśli, przeanalizuje) samo, będzie jego przygodą, zostanie w jego głowie zdecydowanie dłużej, niż Twój szczegółowy opis rozwiązania.
2. Nie niecierpliw się, nie poganiaj dziecka – daj mu tyle czasu, ile potrzebuje.
3. Najlepszą odpowiedzią są pytania!
4. Łamigłówki rozwiązujcie dla przyjemności. Jeżeli jakieś zadanie okazuje się za trudne, nie musicie za wszelką cenę brnąć do jego końca. Wróćcie do niego za jakiś czas.
5. Rozmawiajcie o matematyce. Niech książka inspirowa Was do szukania matematycznych tropów w otaczającym świecie.
6. Twoja energia włożona w stworzenie „opowieści” zadania, przełoży się na energię i chęć dziecka w jego rozwiązanie.

Zadania zostały podzielone na luźne tematyczne grupy. Przy każdym zadaniu podany jest poziom trudności, czas rozwiązania oraz potrzebne przybory.

Miej na uwadze, że wskazane poziomy trudności i czas rozwiązania są orientacyjne, podane po to, by ułatwić Wam zaplanowanie pracy. Celem ćwiczeń nie jest wykonanie ich w określonym czasie, a rozwijanie cennych umiejętności.

Zanim rozpoczniesz matematyczną przygodę, zapoznaj się z legendą.

Przed każdym zadaniem
znajdziesz następujące
informacje

Poziom trudności:

●○○ łatwy ●●○ średni ●●● trudny

Czas rozwiązania zadania podany w minutach, np.:



5, 6, 8 (minut), itp.

Pomocne narzędzia:



kredki



ołówki



gumka



długopis



dowolna kartka papieru



kartka w kratkę



kartka A4



karteczki samoprzylepne



nożyczki



linijka



lusterko



sznurek



guziki



krążki



łyżka i miska



patyczki

Dla przykładu:

poziom trudności:
łatwy

czas rozwiązania zadania:
8 minut

potrzebne narzędzia:
ołówek, kartka



3. Kurs pociągiem po lesie

W tym ćwiczeniu, oprócz prostych rachunków, pokazujemy, dlaczego ważne jest dokładne czytanie poleceń.

Czy dziecko ma problem z rozwiązaniem drugiej części zadania? Jeśli przeczytamy je jeszcze raz, dziecko powinno już wiedzieć, na jakie informacje należy zwrócić uwagę.

wskazówki dla rodziców

Lokomotywa, która dwa razy dziennie robi objazd po całym Zaczarowanym Lesie, ciągnie wagoniki. Siedzi w nich łącznie 4 pasażerów.

1. Na pierwszym przystanku wsiadło 7 pasażerów, a wysiadło 3 pasażerów.
2. Na drugim przystanku wsiadło dwa razy więcej pasażerów niż na pierwszym, a wysiadło 8 pasażerów.
3. Ilu pasażerów jedzie dalej?

treść zadania

Na końcu książki znajdziesz także odpowiedzi do większości zadań.

Życzymy niesamowitych matematycznych przygód!



1. Okręty

Wykorzystajcie statki znajdujące się na stronie obok do przedstawienia sytuacji. Okienka po obu stronach okrętu muszą być zawsze w takim samym kolorze (to znaczy na boku, którego nie widać, sytuacja przedstawia się tak samo jak na widocznym).

Różne kombinacje zapisujcie na kartkach, starajcie się porządkować odpowiedzi.

Starajcie się uporządkować odpowiedź. Można zacząć od takich kombinacji, które na pierwszym miejscu mają żółte okienko. Potem przejść do takich, które na pierwszym miejscu mają zielone okienko. Na końcu rozważyć takie, które na pierwszym miejscu mają okienko niebieskie. Więcej możliwości nie będzie.

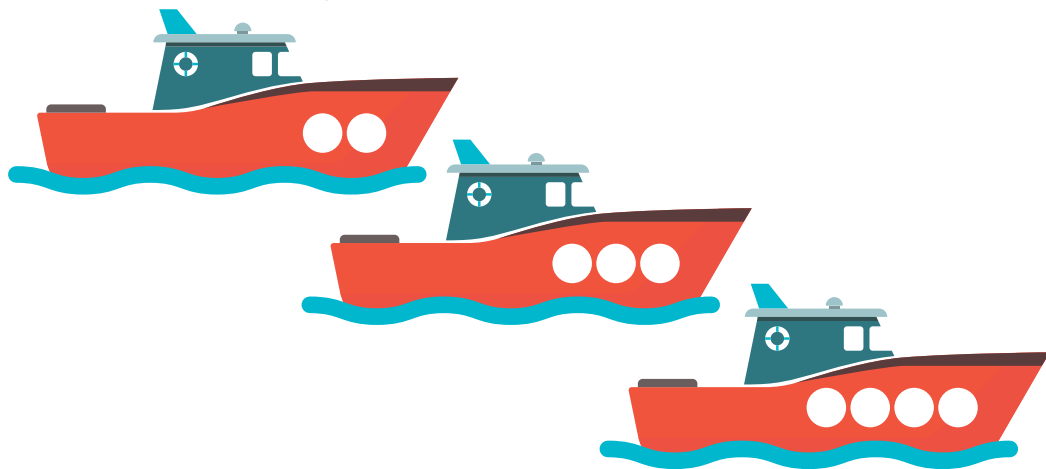
Wykorzystajcie odpowiedź z punktu 3.

Pewien kapitan dowodzący flotyllą okrętów ma problem z ich rozróżnianiem. Na morzu statki wyglądają niemalże identycznie. Żeby ułatwić sobie dowodzenie, kapitan zarządził, by każdy okręt wyróżniał się innym układem kolorów okienek bocznych. Zlecił to zadanie starszym oficerom, którzy muszą je jak najszybciej wykonać.

1. Flotylla skupia tylko małe okręty, które mają dokładnie 2 okienka boczne z jednej strony. Kolory, którymi można je pomalować to żółty i zielony. Ile różnych okrętów może być we flotylli?
2. Jeżeli we flotylli jest 10 okrętów, każdy z dwoma okienkami, to czy trzema kolorami można pomalować okienka tak, jak chce tego kapitan (żeby każdy statek był inny)?

Czy możliwe jest, żeby okienka w tych 10 okrętach były tylko w dwóch kolorach?

3. Jeżeli we flotylli będą większe okręty, z trzema okienkami, a malować możemy je tylko na dwa kolory, to ile okrętów z trzema okienkami może być pod pieczęcią kapitana?
4. Flotylla znowu się powiększa. Kapitan dowodzi teraz wielkimi czterookenkowymi statkami. Ile może ich być, jeżeli okienka będą pomalowane tylko kolorem żółtym i zielonym (nadal żadne dwa okręty nie mogą wyglądać tak samo)?



5. Do floty dołączają nowe okręty, każdy z 4 okienkami. Wydał rozkaz, że w każdym nowym statku, wszystkie 4 okienka muszą być w tym samym kolorze: żółtym, niebieskim, zielonym lub czerwonym (w dalszym ciągu nie może być dwóch takich samych okrętów). Ile najwięcej okrętów może dołączyć do floty? Zastanów się, czy niektóre z nich nie pływają już przypadkiem we floty (punkt 4).
6. Zapowiada się naprawdę długą i niebezpieczną wyprawę. Kapitan dopuścił jeszcze parę statków o 4 oknach. Tym razem marynarze malują je na czerwono i niebiesko w taki sposób, że dwa przednie okienka są w jednym kolorze a dwa tylne – w innym. Ile jest nowych statków?
7. Po wielu zmianach i rozkazach największe statki mogły mieć okienka pomalowane dowolną liczbą kolorów, w dowolny sposób, ale wciąż inaczej na każdym statku. Kapitan wysłał na morską wyprawę tylko te czterookenne okręty ze swojej floty, które miały każde okienko w innym kolorze. Ile statków wypłynęło w morze?
8. Z wyprawy wróciły tylko okręty mające przynajmniej 1 okienko w kolorze żółtym. Pozostałe popłynęły dalej badać nieznaną wodę. Ile statków wróciło wcześniej w wyprawę?

Jakie statki popłynęły na wyprawę? Ile ze statków nie miało żółtego okienka? Ile statków nie wróciło z wyprawy?



2. Co dalej?

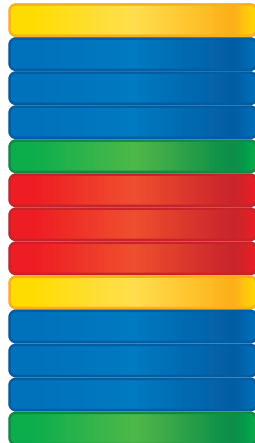
Na poniższych obrazkach znajdziesz wieże zbudowane z krążków. Każdą stworzono według ściśle określonej zasady. Niestety architekt zbiegł z placu budowy i nie zostawił planu konstrukcji. Gotowe są jedynie fundamenty wież, na podstawie których Ty – nowy budowniczy – musisz dokończyć konstrukcję.

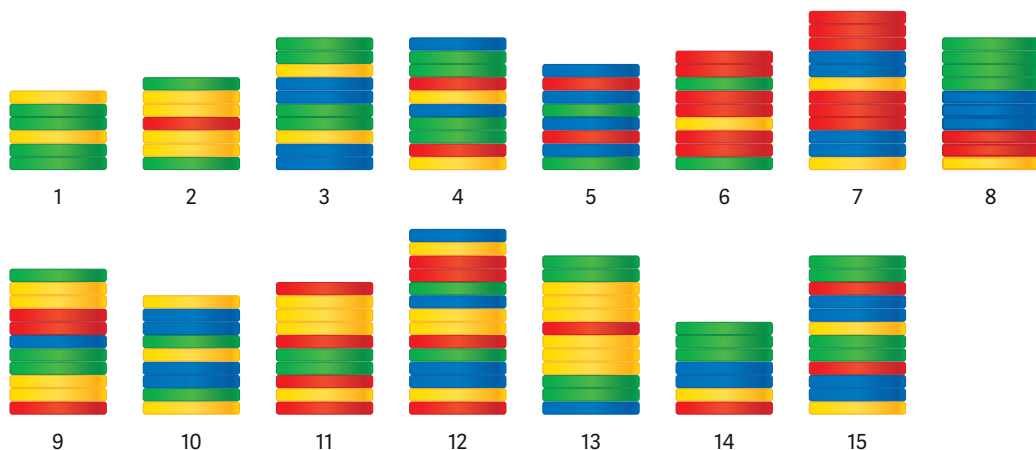
Rozwiązania prezentowane w odpowiedziach nie muszą być jedynymi możliwymi. Jeżeli znaleźliście własną zasadę rządzącą kolorami wieży – super.

Niektóre z wież mogą być budowane w nieskończoność, a inne – tylko do pewnego momentu (nie dlatego, że skończą się materiały, ale z powodu zasady, która tworzy wieżę). Przy budowaniu zastanów się, czy wieża może być tworzona w nieskończoność, czyli tak wysoko, jak tylko zechcesz (zakładając, że materiałów do budowy byłoby pod dostatkiem)!

W sytuacji awaryjnej możesz skorzystać ze wskazówek znajdujących się pod wieżami.

Przy szukaniu zasady w bardziej skomplikowanych wieżach pomocne będzie wypisanie liczb krążków w każdym z kolorów. Dla wieży obok są to 1, 3, 1, 3, 1, itd. Żeby znaleźć zasadę zachowania kolorów, można napisać je po kolei (nie zwracając uwagi na liczbę krążków).





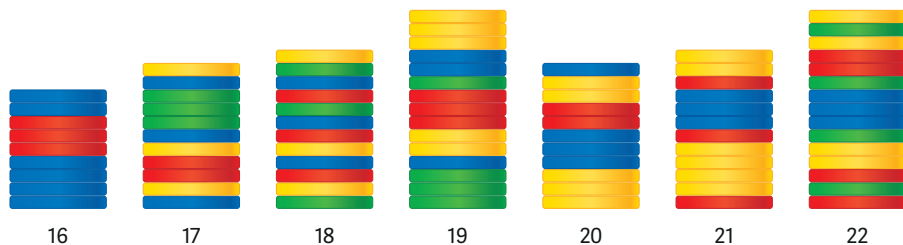
Wieża 9. Zapisz kolejno liczby: czerwonych krążków; żółtych krążków; zielonych krążków; niebieskich krążków; czerwonych krążków; żółtych krążków, itd. Zauważasz pewną zależność? W jakiej kolejności występują kolory?

Wieża 14. Ta zasada nie jest łatwa do odkrycia! Zapisz kolejno licznosc każdego koloru i kombinuj. Powinieneś/-aś otrzymać takie liczby: 1, 1, 2, 3...

Samodzielnie postaraj się znaleźć zasadę wskazywania kolejnej liczby, jeżeli jednak się poddałeś/-aś, czytaj dalej. Jaki związek ma 2 z wcześniejszymi liczbami?

Co wiąże 3 z liczbami poprzedzającymi? Jeżeli wciąż szukasz, to mała pomoc.

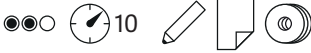
Zwróć uwagę tylko na dwie liczby poprzedzające. Tzn. zastanów się co łączy 2 z 1 i 1? Co łączy 3 z 2 i 1?



Wieża 18. Ta zasada jest trudna do znalezienia. Podziel budynek na czteropiętrowe segmenty, wtedy łatwiej będzie ją zauważyć.

Wieża 22. Wyobraź sobie, że zamiast zielonych krążków możesz wstawić inne kolory, jakie by to były?

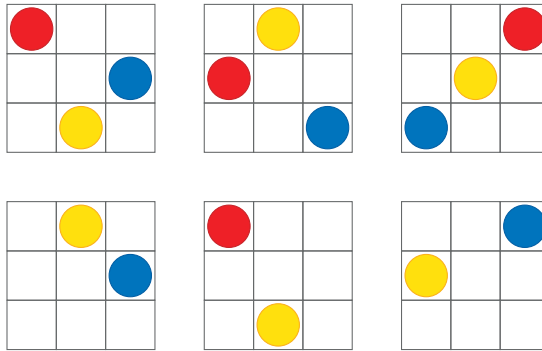
A teraz policz, co ile pięter pojawiają się zielone krążki.



3. Kolorowe sudoku

Narysujcie kwadrat z dziewięcioma polami tak, aby wewnątrz nich mogły zmieścić się krążki.

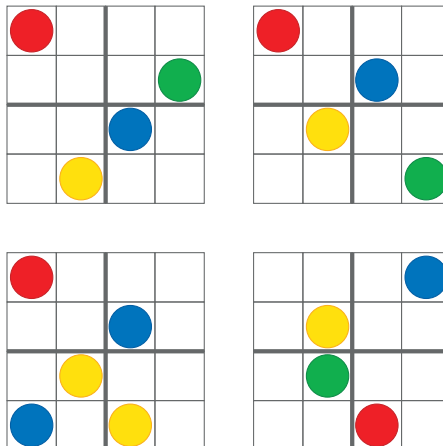
Każde pole kwadratu należy wypełnić figurami tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie było dokładnie jedno kółko niebieskie, jedno czerwone i jedno kółko żółte.



Przechodzimy do kwadratów 4x4 i używamy czterech kolorów – żółtego, zielonego, niebieskiego i czerwonego według tej samej zasady. Teraz dodatkowo kolory nie mogą się powtarzać również w mniejszych kwadratach (2x2).

Zastanówcie się wspólnie, które okienko w kwadracie powinno być wypełnione jako pierwsze. Na pewno znajdziecie takie, w którym może być tylko jeden kolor. Dalej pójdzie już łatwiej.

Łamigłówki są stopniowane według poziomu trudności – od łatwiejszych do trudniejszych.





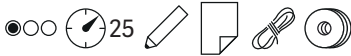
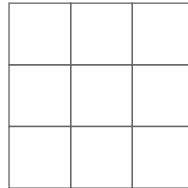
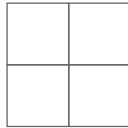
4. Wypełnij kwadrat

Zapisujcie możliwości na kartce. Dodatkowe pytanie: czy można ustawić krążki w taki sposób, aby na przekątnych również był tylko jeden krążek?

Skąd wiadomo, że na tabliczce 2x2 nie można ułożyć więcej? Ile jest możliwych rozwiązań na tabliczce 3x3? Skąd wiesz, że nie można ich ułożyć więcej? Jak można uporządkować rozwiązania, czy widzicie jakieś wzory?

Masz do dyspozycji kwadratową tabliczkę z czterema polami. Zadanie polega na ułożeniu dwóch krążków na tabliczce tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie był zajęty tylko jeden kwadrat. Kolory krążków nie mają znaczenia. Ile jest możliwych ustawień?

Powtórz zadanie dla tabliczki 3x3 – trzy krążki należy ustawić na tabliczce tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie zajęte było dokładnie jedno pole. Znajdź przynajmniej 6 różnych ustawień.



5. Indianie

Wykonujcie każde ćwiczenie bez pośpiechu. Starajcie się układać odpowiedzi tak, żeby nie zgubić żadnej kombinacji.

Kiedy dziecko będzie czuło się pewniej w naszyjnikowych wariacjach spróbujcie rozwiązywać zadania bez używania krążków.

W pewnej indiańskiej wiosce naszyjniki są oznaką wyjątkowej mocy. Chronią mieszkańców przed złymi duchami. Działają jednak tylko wtedy, gdy ich wzór nie powtarza się u żadnego z tubylców. Naszyjniki wykonuje się z krążków zawieszanych na lnianym sznurku tak, jak na rysunku poniżej. Pomożesz Indianom wykonać naszyjniki?

Weź krążki, sznurek i do dzieła!

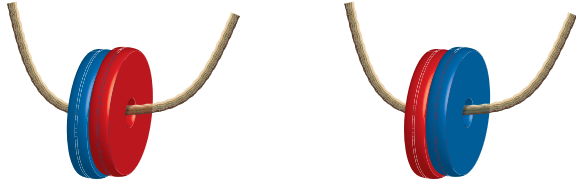


Dziecko może spytać o pewną istotną kwestię dotyczącą rozróżniania naszyjników. Otóż sznurek z nawleczonym czerwonym i niebieskim krążkiem może wyglądać w dowolny sposób. W zależności od tego, jak się go założy, może być czerwono-niebieski lub niebiesko-czerwony. Dlatego traktujemy go jak dwa różne naszyjniki.

Warto porządkować wszystkie możliwe naszyjniki, np. wypisać wszystkie te, które na pierwszym miejscu mają żółty kolor, potem te mające na pierwszym miejscu czerwony kolor, itd.

Skorzystajcie z rozważań w punkcie 1.

1. Do tworzenia naszyjników możemy używać dowolnych kolorów krążków (żółtego, niebieskiego, czerwonego, zielonego), ale na sznurku mogą być maksymalnie dwa krążki (także o tym samym kolorze). Indiańska wioska, dla której będziesz robić biżuterię nie jest duża – plemię liczy 15 osób. Czy zdołasz zaprojektować odmienny naszyjnik dla każdego mieszkańca?



A może uda Ci się wykonać naszyjnik także dla siebie, oczywiście inny niż wszystkie dotychczasowe?

2. Indiańskie kobiety stwierdziły, że do naszyjników idealnie pasowałyby bransoletki z żółtych i czerwonych krążków. Wioskę zamieszkuje 6 kobiet. Na ich bransoletkach (podobnie jak na naszyjnikach), muszą być dokładnie 2 krążki. Czy każda z Indianek będzie miała niepowtarzalną bransoletkę?
3. Jeżeli zamiast kolorów czerwonego i żółtego użyjemy żółtego i zielonego, jak zmieni się rozwiązanie z pkt. 2? Czy z tych dwóch kolorów uda się zrobić więcej unikatowych bransoletek?
4. Jeżeli na bransoletce mogą być dowolne kolory (z czterech dostępnych), ale w dalszym ciągu muszą być na niej dokładnie dwa krążki, to ile bransoletek uda się zrobić?
5. Teraz Indianki zapragnęły bransoletek na kostkę. Na sznurek nawlecz dokładnie 3 krążki, każdy w innym kolorze. Możesz