
Modelowanie zmienności i ryzyka

Metody ekonometrii finansowej

Małgorzata Doman, Ryszard Doman



Oficyna

a Wolters Kluwer business

SERIA AKADEMICKA

<i>D. Witkowska</i>	PODSTAWY EKONOMETRII I TEORII PROGNOZOWANIA Podręcznik z przykładami i zadaniami
<i>T. Bednarski</i>	ELEMENTY MATEMATYKI W NAUKACH EKONOMICZNYCH Podręcznik dla studentów ekonomii
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	PODSTAWY RACHUNKOWOŚCI
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	ZBIÓR ZADAŃ Z PODSTAW RACHUNKOWOŚCI
<i>Pod red. K. Winiarskiej</i>	RACHUNKOWOŚĆ ZAAWANSOWANA
<i>K. Winiarska, M. Kaczurak-Kozak</i>	RACHUNKOWOŚĆ BUDŻETOWA
<i>E. Walińska</i>	MIĘDZYNARODOWE STANDARDY RACHUNKOWOŚCI Ogólne zasady pomiaru i prezentacji pozycji bilansu i rachunku wyników
<i>M. Andrzejewski, K. Jonas, P. Młodkowski</i>	ZASTOSOWANIE TECHNIK KOMPUTEROWYCH W RACHUNKOWOŚCI Systemy dla małych i średnich przedsiębiorstw
<i>P. Dittmann</i>	PROGNOZOWANIE W PRZEDSIĘBIORSTWIE Metody i ich zastosowanie
<i>M. Ciechan-Kujawa</i>	RACHUNEK KOSZTÓW JAKOŚCI Wykorzystanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem
<i>S. Sojak, H. Józwiak</i>	RACHUNEK KOSZTÓW DOCELOWYCH
<i>D.P. Doyle</i>	KONTROLA KOSZTÓW Element zarządzania strategicznego
<i>Pod red. M. Poszwy</i>	ROZLICZENIA PODATKOWE PRZEDSIĘBIORCY
<i>B. Kołosowska, A. Tokarski, M. Tokarski, E. Chojnacka</i>	STRATEGIE FINANSOWANIA DZIAŁALNOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW
<i>W. Rogowski</i>	RACHUNEK EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI

FINANSE I INWESTYCJE

<i>D. Wędzki</i>	ANALIZA WSKAŹNIKOWA SPRAWOZDANIA FINANSOWEGO
<i>Pod red. E. Nowaka</i>	STRATEGICZNE ZARZĄDZANIE KOSZTAMI

Pełna oferta wydawnicza jest dostępna na stronie www.profinfo.pl

Modelowanie zmienności i ryzyka

Metody ekonometrii finansowej

Małgorzata Doman, Ryszard Doman

Kraków 2009



Oficyna
a Wolters Kluwer business

Projekt graficzny okładki i zdjęcie
Barbara Widlak

Redaktor
Anna Maria Thor

Korekta
Lilianna Rudnik

Redaktor techniczny
Janina Burek

Skład i łamanie
Wydawnictwo „jak” Andrzej Choczewski

© Copyright by Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o. 2009
All rights reserved.

ISBN 978-83-7526-677-1

Wydane przez:
Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o.

Redakcja Książek
01-231 Warszawa, ul. Płocka 5a
tel. 022 535-80-00

31-156 Kraków, ul. Zacisze 7
tel. 012 630-46-00

e-mail: ksiazki@wolterskluwer.pl
www.wolterskluwer.pl

Księgarnia internetowa: www.profinfo.pl

Spis treści

Wstęp	9
1. Empiryczne własności finansowych szeregów czasowych.....	15
1.1. Procesy stochastyczne i szeregi czasowe	16
1.2. Pojęcie stacjonarności szeregu czasowego	17
1.3. Funkcja autokorelacji.....	18
1.4. Testowanie normalności rozkładu	19
1.5. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu	20
1.6. Fakty empiryczne	22
1.7. Od teorii do praktyki	34
1.8. Uwagi.....	44
2. Zależności liniowe w szeregach stóp zwrotu instrumentów finansowych....	45
2.1. Testy Boxa–Pierce’a i Ljunga–Boxa	45
2.2. Szeregi liniowe	46
2.3. Modele autoregresji	47
2.4. Modele średniej ruchomej.....	61
2.5. Modele ARMA.....	66
2.6. Od teorii do praktyki	71
2.7. Uwagi.....	74
3. Modelowanie heteroskedastyczności warunkowej	75
3.1. Ogólna struktura modelu zmienności.....	76
3.2. Testowanie efektu ARCH	78
3.3. Model ARCH.....	79
3.4. Modele GARCH.....	81

3.5. Rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH	85
3.6. Testowanie jakości dopasowania modelu	89
3.7. Ocena jakości prognoz	94
3.8. Od teorii do praktyki	96
3.9. Uwagi	104
4. Rodzina modeli typu GARCH	105
4.1. Rozszerzenia modelu GARCH(p, q)	105
4.2. Estymacja modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności	110
4.3. Od teorii do praktyki	112
4.4. Uwagi	118
5. Długa pamięć i persystencja w finansowych szeregach czasowych	119
5.1. Model ARIMA	120
5.2. Model ARFIMA	123
5.3. Długa pamięć i persystencja w szeregach zmienności	125
5.4. Testowanie stacjonarności i długiej pamięci	128
5.5. Od teorii do praktyki	133
5.6. Uwagi	138
6. Zmienność cen instrumentów finansowych	139
6.1. Pojęcie zmienności w ujęciu statycznym i dynamicznym	140
6.2. Zmienność zrealizowana	142
6.3. Efekty mikrostruktury rynku a zmienność zrealizowana	150
6.4. Teoria zmienności zrealizowanej	153
6.5. Od teorii do praktyki	157
6.6. Uwagi	166
7. Modele dwuliniowe	167
7.1. Charakterystyka modeli dwuliniowych	167
7.2. Modele dwuliniowe a zgrupowania zmienności	168
7.3. Od teorii do praktyki	170
7.4. Uwagi	175
8. Modele zmienności stochastycznej	176
8.1. Charakterystyka modeli zmienności stochastycznej	177
8.2. Estymacja modelu SVX	179

8.3. Prognozowanie zmienności za pomocą modeli SV	183
8.4. Porównanie wyników uzyskanych za pomocą modeli GARCH i SV	184
8.5. Od teorii do praktyki	188
8.6. Uwagi	195
9. Wartość zagrożona.....	196
9.1. Metody nieparametryczne szacowania wartości zagrożonej	198
9.2. Wyznaczanie wartości zagrożonej za pomocą kwantyli warunkowych	201
9.3. Zastosowanie parametrycznych modeli zmienności do wyznaczania VaR	202
9.4. Metodologia RiskMetrics	203
9.5. Test Kupca	203
9.6. Test DQT Engle'a i Manganellego.....	205
9.7. Od teorii do praktyki	206
9.8. Uwagi.....	218
10. Regresja kwantylowa i modele CAViaR	219
10.1. Kwantyle regresyjne	219
10.2. Modele CAViaR	221
10.3. Estymacja modeli CAViaR	223
10.4. Od teorii do praktyki.....	225
10.5. Uwagi	238
11. Modele przełącznikowe	239
11.1. Modele progowe	240
11.2. Modele wygładzonego przejścia.....	240
11.3. Model Hamiltona	241
11.4. Modele MS-AR-GARCH	246
11.5. Od teorii do praktyki.....	249
11.6. Uwagi	264
12. Modelowanie dynamiki zależności warunkowych	265
12.1. Ogólny wielowymiarowy model zmienności.....	266
12.2. Zależności liniowe w szeregach wielowymiarowych.....	267
12.3. Model VEC	270
12.4. Model BEKK	270
12.5. Model stałych korelacji warunkowych.....	271
12.6. Modele dynamicznych korelacji warunkowych.....	272

12.7. Modele O-GARCH i GO-GARCH.....	275
12.8. Test stałości korelacji.....	276
12.9. Od teorii do praktyki.....	277
12.10. Uwagi.....	285
13. Wartość zagrożona portfela.....	286
13.1. Metoda symulacji historycznej	286
13.2. Szacowanie wartości zagrożonej portfela za pomocą wielowymiarowych modeli GARCH.....	288
13.3. Koherentne miary ryzyka.....	289
13.4. Od teorii do praktyki.....	290
13.5. Uwagi.....	293
Zakończenie	295
Dodatek	297
Literatura.....	299
Indeks.....	313

Wstęp

Ekonometria finansowa jest dziedziną, która rozwinęła się z klasycznej ekonometrii, analizy szeregów czasowych oraz finansów. Szeroko rozumiana obejmuje całą tematykę modelowania rynków finansowych, czasami jednak sprowadza się ją do analizy finansowych szeregów czasowych, która niewątpliwie zalicza się do jej głównych nurtów.

Powstanie ekonometrii finansowej datuje się na rok 1982, w którym prestiżowe czasopismo „Econometrica” opublikowało artykuł Roberta Engle’a wprowadzający modele ARCH. Jest to o tyle ciekawe, że praca ta nie dotyczyła rynków finansowych, a jedynie wykorzystywała w modelowaniu inflacji model wychwytyjący zgrupowania zmienności charakterystyczne dla większości szeregów stóp zwrotu z instrumentów finansowych.

Oczywiście już wcześniej publikowane były wyniki, które można by dzisiaj zaliczyć do ekonometrii finansowej. Na pewno należałoby w tym kontekście wymienić wyniki zawarte w pracach Famy oraz Mandelbrota z lat 60. i 70. XX wieku, które stworzyły podstawy do powstania w odpowiednim momencie nowej dyscypliny.

Ekonometria finansowa rozwija się obecnie bardzo gwałtownie, co jest spowodowane nie tylko wzrostem aktywności ośrodków akademickich, w których jest uprawiana, ale również zwiększeniem możliwości komputerów pozwalających na dokonywanie nawet bardzo złożonych obliczeń, gromadzenie i przetwarzanie ogromnej liczby danych, a także ciągłym zapotrzebowaniem zgłaszanym przez praktyków, wynikającym z rozwoju rynków finansowych.

Atrakcyjność ekonometrii finansowej jako dyscypliny badawczej jest związana w dużym stopniu z jej interdyscyplinarnością. Do osiągnięcia sukcesu w jej uprawianiu potrzeba bowiem jednoczesnej znajomości bardzo zaawansowanych i zróżnicowanych metod ilościowych oraz dość szczegółowej wiedzy na temat funkcjonowania rynków finansowych połączonej z ciągłą obserwacją rzeczywistości tych rynków. Jest to trudne, ale, jak nasze doświadczenia dydaktyczne pokazują, często fascynujące wyzwanie dla młodych ludzi.

Niniejsza książka powstała na podstawie materiału badawczego przedstawionego przez autorów w ich monografii opublikowanej w 2004 roku, a także w późniejszych pracach. Stanowi ona znacznie rozszerzoną i uporządkowaną wersję wykładów z modelowania zmienności i ryzyka, prowadzonych przez Małgorzatę Doman od 3 lat na kierunku informatyka i ekonometria w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu oraz z ekonometrii finansowej, prowadzonych przez Ryszarda Domana dla specjalności matematyka finansowa i aktuarialna na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza. Nasze doświadczenia pokazują, że (przy raczej dużym zaangażowaniu słuchaczy i wykładowcy) przedstawiony materiał można zrealizować w trakcie semestralnego wykładu.

Książka jest jednak także w stosownym stopniu obrazem naszych doświadczeń z teorii i praktyki modelowania, ponieważ oboje pracujemy aktywnie naukowo w tej dziedzinie. W ramach ograniczonych objętością wykładu, książka może być również traktowana jako monografia przedstawiająca wybrane aspekty wiedzy w zakresie modelowania zmienności.

Niektórym czytelnikom wybór treści przedstawionych w tej książce może wydawać się niekonsekwentny. Czasami szczegółowo tłumaczymy pojęcia uważane za łatwe, a kiedy indziej dość szybko przechodzimy do porządku dziennego nad rzeczami złożonymi. Jest to jednak zamierzone i wynika z naszych doświadczeń związanych z prowadzonymi wykładami. Nie jest niczym nadzwyczajnym, zwłaszcza na kierunkach ekonomicznych, swobodne posługiwanie się pojęciem estymatora bez choćby poprawnej intuicji tego, czym jest zmienna losowa. Wychodząc zatem z założenia, że w trakcie wykładu zamiast długo dochodzić, czy studenci rozumieją podstawowe pojęcia, lepiej jest szybko i krótko je wyjaśnić, przedstawiamy, na przykład, w pierwszym rozdziale w sposób intuicyjny niezbędne informacje na temat prawdopodobieństwa i zbiorów informacji.

W tego typu książce, która z założenia ma być dostępna dla szerokiego grona czytelników, konieczne są pewne uproszczenia i odwołania do intuicji. Kompromis pomiędzy ścisłością a komunikatywnością wydaje nam się niezbędny. Staramy się więc znaleźć pewną równowagę. Czasami, kiedy na założonym poziomie zaawansowania nie można precyzyjnie wyjaśnić pewnych subtelności, wolimy o nich nie wspominać, niż ryzykować mało precyzyjne rozważania. Zakładamy bowiem, że czytelnik zainteresowany głębszymi rozważaniami teoretycznymi sięgnie po kolejne pozycje z literatury, a czytelnik nakierowany na zastosowania praktyczne nabierze doświadczenia przy samodzielnym prowadzeniu oszacowań. Z modelowaniem jest bowiem tak, jak z pływaniem. Nie można się tego nauczyć „na sucho”. Tylko samodzielne szacowanie parametrów kolejnych modeli (i zastanawianie się nad interpretacją uzyskanych wyników) pozwala na zrozumienie zależności występujących pomiędzy zmiennymi i sposobu oddziaływania jednych zmiennych na drugie, czyli po prostu na dobre zrozumienie mechanizmów modeli.

Przyjmujemy też zasadę, że w trakcie lektury czytelnik nabiera doświadczenia. W związku z tym wyjaśnienia w początkowych rozdziałach są dokładniejsze niż w dalszych. Tempo wykładu rośnie a liczba wyjaśnianych szczegółów maleje z rozdziału na rozdział.

W rozdziale 1 przedstawiamy podstawowe wiadomości na temat analizy szeregów czasowych oraz dokonujemy przeglądu tak zwanych faktów empirycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Własności te stanowią podstawę do konstrukcji i stosowania konkretnych modeli. Z tego powodu dobre zrozumienie materiału przedstawionego w tym rozdziale jest bardzo istotne jako pozwalające na wyrobienie właściwej intuicji.

Rozdział 2 poświęcony jest przedstawieniu modeli AR, MA i ARMA. Ekonometria finansowa koncentruje się przede wszystkim na zależnościach nieliniowych. Jednak przy stosowaniu większości testów wykrywających istnienie tych zależności oraz szacowaniu modeli zmienności istotne znaczenie ma poprawna specyfikacja średniej warunkowej.

W rozdziale 3 omawiamy ogólną konstrukcję modelu zmienności i wprowadzamy modele ARCH(q) oraz GARCH(p,q). Charakteryzujemy również rozkłady błędu zwykle stosowane w modelach GARCH. Ponadto rozdział ten zawiera przegląd testów, które można wykorzystywać jako narzędzia oceny dopasowania modelu, oraz miar jakości prognoz.

Rozdział 4 zawiera rozwinięcie teorii dotyczącej modeli GARCH stanowiących najpopularniejszą rodzinę modeli zmienności. Przedstawiamy kolejne rozszerzenia i modyfikacje klasycznego modelu GARCH(p,q) oraz ich zastosowania w praktyce modelowania. Prezentujemy też metody estymacji modeli GARCH.

W rozdziale 5 zajmujemy się badaniem występowania zależności długookresowych w szeregach stóp zwrotu z instrumentów finansowych. Przedstawiamy modele, które mogą wychwycić to zjawisko, i omawiamy wybrane testy długiej pamięci i stacjonarności.

Rozdział 6 poświęcony jest tematyce zmienności zrealizowanej stanowiącej jeden z głównych nurtów ekonometrii finansowej. Analizujemy pewne aspekty teoretyczne i praktyczne tego pojęcia i w tym kontekście rozważamy problemy jakości prognoz zmienności oraz adekwatnej miary zmienności.

Bardzo krótki rozdział 7 zawiera podstawowe informacje o modelach dwuliniowych i wyjaśnia ich znaczenie w modelowaniu zależności nieliniowych.

Rozdział 8 dotyczy modeli zmienności stochastycznej. Zarówno klasa modeli dwuliniowych, jak i klasa modeli zmienności stochastycznej są postrzegane jako konkurencyjne dla modeli GARCH. Jednak, o ile w wypadku modeli dwuliniowych walka jest przegrana, o tyle modele zmienności stochastycznej zdobywają coraz większą popularność, przede wszystkim w zastosowaniach związanych z wyceną instrumentów pochodnych.

Rozdział 9 jest pierwszym z trzech poświęconych modelowaniu wartości zagrożonej (*Value at Risk* – VaR). Definiujemy w nim podstawowe pojęcia i omawiamy metodę obliczania VaR wykorzystującą oszacowania zmienności, a także przedstawiamy testy pozwalające na ocenę jakości prognoz VaR.

W rozdziale 10 wprowadzamy metodę regresji kwantylowej i przedstawiamy zastosowanie, wywodzących się z niej modeli CAViaR, do szacowania wartości zagrożonej.

Rozdział 11 zawiera rozważania na temat modeli przełącznikowych pozwalających na modelowanie dynamiki szeregów czasowych, w sytuacji gdy jest ona niejednorodna. Omawiamy w nim modele przełącznikowe Hamiltona oraz modele GARCH z przełączaniem typu Markowa, a także, choć mniej dokładnie, modele wygładzonego przejścia.

W rozdziale 12 przechodzimy do świata modeli wielowymiarowych i charakteryzujemy kilka wybranych typów modeli M-GARCH, zwracając szczególną uwagę na ich uproszczone wersje, które mogą być przydatne w zastosowaniach praktycznych w dynamicznej analizie zależności występujących pomiędzy instrumentami dużych portfeli.

Rozdział 13 stanowi naturalną kontynuację rozdziału 12 i jest poświęcony problemowi szacowania wartości zagrożonej dla portfela.

Przedostatni podrozdział każdego rozdziału zawiera prezentację praktycznego działania opisanych w obejmującym rozdziale metod i modeli. Estymacja modeli i obliczenia wykonywane są dla wybranych szeregów z polskiego rynku finansowego. W większości przykładów występują szeregi procentowych logarytmicznych stóp zwrotu indeksów WIG i WIG20, kursu walutowego USD/PLN, akcji spółek Agora i PKN Orlen oraz stopy procentowej WIBOR 3M pochodzące z lat 1995–2003. Szeregi są zróżnicowane i zostały wybrane tak, aby można było na ich przykładzie dobrze zilustrować praktyczne problemy pojawiające się w procesie modelowania. Nie bez znaczenia jest także to, że bardziej szczegółową analizę własności tych szeregów można znaleźć we wspomnianej monografii autorów niniejszej książki z 2004 roku.

Wszystkie obliczenia przedstawione w książce zostały wykonane za pomocą pakietów G@RCH™5, Time Series Modelling v4.26 i SsfPack działających w środowisku Ox™ oraz programu MATLAB®.

Kończąc każdy rozdział uwagi i komentarze zawierają odniesienia do literatury i wskazówki dotyczące źródeł pozwalających na poszerzenie przedstawionych treści, a czasami jeszcze na pewne spostrzeżenia dotyczące dyskusyjnych aspektów teoretycznych bądź praktycznych rozważanej tematyki. Przedstawiony tu wybór literatury w żadnym razie nie jest pełny. Wskazane pozycje mają tylko dać czytelnikowi informację o książkach i artykułach, w których może znaleźć więcej wiadomości na temat interesujących go zagadnień. Również dane na

temat prac opisujących badania odnoszące się do polskiego rynku finansowego nie są pełne. Chodziło nam raczej o to, by wskazać grupy badawcze i osoby zajmujące się w Polsce omawianymi zagadnieniami.

Najważniejsze szeregi czasowe wykorzystywane w przykładach empirycznych stanowiących ilustracje do przedstawianych rozważań teoretycznych są dostępne na stronie internetowej: <http://kms.ue.poznan.pl/doman/Modelowanie/Szeregi.zip>.

Ponieważ materiał zawarty w tej książce powstał w ramach wykładów do wyboru, nie byłoby jej, gdyby nie liczne grupy studentów co roku zgłaszających chęć wysłuchania tych wykładów. Bardzo im dziękujemy nie tylko za to, że wybrali nasze wykłady, ale także za to, że przez swoje pytania i wątpliwości zmuszali nas do ciągłej pracy nad ich treścią. Szczególne podziękowania należą się studentom, którzy w roku akademickim 2005/2006 studiowali w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu na IV roku specjalności cybernetyka ekonomiczna i wystąpili z inicjatywą uruchomienia wykładów z zakresu modelowania zmienności i ryzyka.

Żadna książka ani żaden wykład nie są doskonałe. Uważny czytelnik zawsze znajdzie błędy czy usterki. Zapewne niejeden specjalista, przeglądając naszą książkę, pomyśli „można to było zrobić lepiej”. Na pewno można było. Dlatego też będziemy wdzięczni czytelnikom za wszelkie uwagi i komentarze, które prosimy nadsyłać na adres: malgorzata.doman@ue.poznan.pl lub rydoman@amu.edu.pl.

Empiryczne własności finansowych szeregów czasowych

Głównym celem analizy finansowych szeregów czasowych jest stworzenie aparatu teoretycznego i praktycznego wykorzystywanego w dynamicznej wycenie szeroko rozumianych instrumentów finansowych (np. papierów wartościowych, walut obcych, instrumentów pochodnych, indeksów giełdowych). Szczególną cechą odróżniającą finansowe szeregi czasowe od innych szeregów empirycznych jest niepewność zawarta nie tylko w danych, ale także związana z brakiem jednoznacznego określenia używanych pojęć, np. zmienności ceny instrumentu finansowego, która jest wielkością nieobserwowalną bezpośrednio. Typowym dla większości empirycznych badań w ekonomii problemem powiększającym jeszcze tę niepewność jest konieczność wnioskowania statystycznego na podstawie jednego tylko szeregu obserwacji, który wcale nie musi pochodzić od ciągu zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zastosowanie analizy szeregów finansowych w praktyce finansów wymaga często oceny rozkładów warunkowych tych zmiennych w celu określenia, np. jak zmienia się ocena poziomu ryzyka w zależności od zmiany w czasie wpływających na nie czynników.

Podstawowym obiektem badań w analizie finansowych szeregów czasowych są szeregi stóp zwrotu (stóp zmian) cen instrumentów finansowych. Są ku temu powody dwojakiego rodzaju. Pierwszy jest pochodną tego, że – z punktu widzenia przeciętnego inwestora – rynek finansowy może być traktowany jako bliski doskonale konkurencyjnemu, a zatem wielkość inwestycji nie wpływa na zmiany cen. W konsekwencji stopa zwrotu nie zależy od skali i zawiera pełną informację rozstrzygającą o podjęciu inwestycji. Drugi powód jest natury praktycznej i wiąże się z tym, że szeregi stóp zwrotu mają bardziej użyteczne dla analizy statystycznej własności niż szeregi cen.

**szeregi stóp zwrotu
cen instrumentów
finansowych jako
podstawowy obiekt
badań**

W tym rozdziale, po krótkim omówieniu wstępnych pojęć, przedstawiamy podstawowe własności i zależności obserwowane w szeregach stóp zwrotu

z instrumentów finansowych. Znajomość tych faktów jest najważniejszym czynnikiem pozwalającym na konstruowanie i dobór modeli wykorzystywanych w opisie i wyjaśnianiu mechanizmów rynków finansowych oraz ich prognozowaniu. Wiedząc ze wstępnych analiz, że w szeregu czasowym występuje określony typ zależności, możemy to skutecznie wykorzystywać w specyfikacji modelu.

1.1. Procesy stochastyczne i szeregi czasowe

Nasze rozważania będziemy prowadzić w ramach pewnego formalnego podejścia, które przedstawimy tu na dwa sposoby: intuicyjnie, z myślą o czytelnikach, którzy nie zaliczyli odpowiednio zaawansowanego kursu z rachunku prawdopodobieństwa, oraz ściśle, dla tych, którzy są z tą tematyką bardziej zaznajomieni.

Będziemy zakładać, że obserwowane w kolejnych odstępach czasu ceny instrumentów finansowych są realizacjami zmiennych losowych określonych na tej samej *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pojęcie przestrzeni probabilistycznej wyjaśnione jest w tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Określenie przestrzeni probabilistycznej

Zmienna	Wyjaśnienie intuicyjne	Definicja formalna
Ω	jest zbiorem „wszystkich możliwych stanów świata” (jeśli myślimy tylko o konkretnym instrumencie finansowym, to Ω może być zbiorem jego wszystkich możliwych cen).	jest zbiorem zdarzeń elementarnych.
$\mathcal{F}$	jest zbiorem rozważanych zdarzeń, czyli zbiorem podzbiorów zbioru Ω , który musi spełniać pewne naturalne ograniczenia.	jest σ -ciałem podzbiorów zbioru Ω .
P	jest funkcją, która zdarzeniom ze zbioru $\mathcal{F}$ przyporządkowuje prawdopodobieństwo ich zajścia.	jest σ -addytywną miarą probabilistyczną.

definicja zmiennej losowej

Wielkości obserwowane na rynkach finansowych, np. ceny instrumentów finansowych czy wielkość obrotu, są z reguły traktowane jako realizacje zmiennych losowych.

Zmienna losowa jest funkcją określoną na zbiorze wszystkich możliwych stanów świata Ω przyjmującą wartości ze zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ (zmienne losowe jednowymiarowe) lub zbioru $\mathbb{R}^n$ (zmienne losowe wielowymiarowe, wektory losowe). Wartość zmiennej losowej zależy więc od zdarzenia elementarnego, które się zrealizuje, czyli od stanu świata, który zaistnieje. Zmienną losową charakteryzuje jej rozkład prawdopodobieństwa, czyli informacja o tym, z jakim prawdopodobieństwem zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziałów

(w wypadku zmiennej losowej jednowymiarowej) albo z odpowiednich podzbiorów zbioru $\mathbb{R}^n$ (w wypadku wektora losowego).

Rodzinę $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywa się procesem stochastycznym. Zazwyczaj przyjmuje się, że zbiór indeksów $\mathbb{T}$ jest podzbiorem przedziału, $[0, +\infty)$ i interpretuje się go jako czas. Gdy zbiór $\mathbb{T}$ jest przeliczalny, mówimy, że rozpatrywany proces jest procesem z czasem dyskretnym, a gdy $\mathbb{T}$ jest przedziałem, mówimy o procesie z czasem ciągłym. Na proces stochastyczny można patrzeć jak na odwzorowanie $X: \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$, takie że dla dowolnych $t \in \mathbb{T}$ oraz $x \in \mathbb{R}$, zbiór $\{\omega \in \Omega : X(t, \omega) \leq x\}$ należy do σ -ciała $\mathcal{F}$. Dla ustalonego $\omega_0 \in \Omega$, proces stochastyczny X wyznacza odwzorowanie $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto X_t(\omega_0)$, które nazywa się realizacją lub trajektorią procesu X odpowiadającą zdarzeniu elementarnemu ω_0 .

**proces
stochastyczny**

W ekonometrii finansowej, ale nie tylko, realizację procesu stochastycznego X , która, gdy $\mathbb{T} \subseteq \{1, 2, \dots\}$, jest ciągiem (x_t) obserwacji $x_1, x_2, \dots$, nazywa się szeregiem czasowym i oznacza (x_t) . Powszechna jest także konwencja, która będzie również stosowana w tej książce, nazywania szeregiem czasowym, nie tylko realizacji procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, ale również samego procesu, w sytuacjach gdy nie prowadzi to do nieporozumień. Przy tej konwencji, proces stochastyczny X oznacza się, tak samo jak szereg czasowy, symbolem (x_t) , a zmienną losową X_t oznacza się, tak jak jej realizację, symbolem x_t .

**zmienną losową
i jej realizację
oznaczamy tym
samym symbolem**

1.2. Pojęcie stacjonarności szeregu czasowego

Jednym z najważniejszych pojęć w statystycznej analizie szeregów czasowych jest stacjonarność.

Szereg (r_t) nazywamy ściśle stacjonarnym, jeśli dla każdego ciągu $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ indeksów oraz dla każdej liczby całkowitej s łączny rozkład wektora losowego $(r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_k})$ jest taki sam, jak łączny rozkład wektora $(r_{t_1+s}, r_{t_2+s}, \dots, r_{t_k+s})$.

**ściśle
stacjonarność**

Słaba (kowariancyjna) stacjonarność szeregu (r_t) oznacza, że zmienne (r_t) mają skończony drugi moment $(E(r_t^2) < \infty)$ oraz $E(r_t) = \mu$ i $\text{cov}(r_t, r_{t+l}) = \gamma_l$ (dla dowolnych indeksów t i l). Oznacza to w szczególności, że wszystkie r_t mają tę samą skończoną wariancję γ_0 , a kowariancja między r_t i r_s zależy jedynie od $|t - s|$.

**kowariancyjna
stacjonarność**

Opracowano wiele testów stacjonarności szeregów czasowych. Nie będziemy się jednak nimi tu zajmować, ze względu na to, że w literaturze finansowej

powszechnie przyjmuje się założenie, iż stanowiące główny przedmiot naszych badań szeregi (r_t), gdzie r_t jest *stopą zwrotu* z instrumentu finansowego, tzn.

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \text{ a } P_t \text{ jest ceną instrumentu w momencie } t, \text{ są słabo stacjonarne.}$$

1.3. Funkcja autokorelacji

Rozważmy słabo stacjonarny szereg czasowy (r_t). Funkcja autokorelacji (*auto-correlation function* – ACF) przyporządkowuje liczbie całkowitej l współczynnik korelacji ρ_l między zmiennymi r_t i r_{t-l} :

$$\rho_l = \frac{\text{cov}(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{\text{var}(r_t) \text{var}(r_{t-l})}} = \frac{\text{cov}(r_t, r_{t-l})}{\text{var}(r_t)} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} \quad (1.1)$$

**funkcja
autokorelacji ACF**

Z definicji tej wynika, że $\rho_0 = 1$, $\rho_l = \rho_{-l}$ oraz $-1 \leq \rho_l \leq 1$. Mówimy, że w szeregu (r_t) nie występuje autokorelacja, jeśli $\rho_0 = 1$ oraz $\rho_l = 0$ dla wszystkich $l > 0$.

Szereg czasowy (r_t) nazywa się ścisłym białym szumem (*strict white noise*), jeśli zmienne r_t tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (*independent and identically distributed* – iid) ze skończoną średnią i wariancją.

ściśły biały szum

Jeśli ponadto zmienne r_t mają rozkład gaussowski białym szumem.

biały szum

Jeśli zmienne r_t tworzą szereg kowariancyjnie stacjonarny i wartości ρ_l funkcji autokorelacji szeregu (r_t) są równe zeru dla wszystkich $l > 0$, to (r_t) nazywa się białym szumem (*white noise*).

Dla danego ciągu obserwacji $(r_t)_{t=1}^T$, niech $\bar{r}$ oznacza średnią z próby, tzn. $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$. Wówczas współczynnik autokorelacji z próby z opóźnieniem l określa się wzorem:

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(r_{t-l} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \quad (1.2)$$

Przy pewnych ogólnych założeniach, $\hat{\rho}_l$ jest zgodnym estymatorem współczynnika autokorelacji ρ_l . Na przykład, jeśli (r_t) jest ciągiem iid, spełniającym warunek $E(r_t^2) < \infty$, to dla dowolnego całkowitego $l > 0$, $\hat{\rho}_l$ ma rozkład asymptotycznie normalny ze średnią 0 i wariancją $\frac{1}{T}$. Fakt ten może być wy-

korzystany w praktyce do testowania hipotezy zerowej $H_0: \rho_l = 0$, przeciw alternatywie $H_a: \rho_l \neq 0$. Rozkład statystyki testowej postaci $\sqrt{T}\hat{\rho}_l$ jest asymptotycznie standardowy normalny. Pozwala to wyliczyć 95-procentowe przedziały ufności, które na wykresach funkcji autokorelacji z próby w całej książce zaznaczone są poziomymi liniami.

hipoteza zerowa

$H_0: \rho_l = 0$

Ogólniej, jeśli (r_t) jest szeregiem słabo stacjonarnym spełniającym warunek $r_t = \mu + \sum_{i=0}^q \psi_i \varepsilon_{t-i}$, gdzie $\psi_0 = 1$, a (ε_j) jest gaussowskim białym szumem, to $\hat{\rho}_l$ ma rozkład asymptotycznie normalny z zerową średnią i wariancją $\frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^q \rho_i^2 \right)$, dla $l > q$.

Więcej informacji na temat rozkładów asymptotycznych współczynników autokorelacji z próby można znaleźć na przykład w książce Brockwella i Davisa (1991).

Przy badaniach zależności pomiędzy dwoma różnymi szeregami r_t i s_t wyznacza się ich korelację z próby z opóźnieniem l . Wielkości te są określone wzorem:

$$\hat{\rho}_{r,s}(l) = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \bar{r})(s_{t-l} - \bar{s})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (s_t - \bar{s})^2}}$$

1.4. Testowanie normalności rozkładu

Jedno z pierwszych pytań, które stawia się przy analizie własności szeregów czasowych, dotyczy ich rozkładów. Długo przyjmowane, na ogół ze względów praktycznych, w literaturze finansowej założenie, że szeregi stóp zwrotu mają rozkład normalny, jest zwykle nieprawdziwe. Testowanie normalności rozkładu stóp zwrotu jest zwykle tylko formalnością, dlatego w badaniach finansowych stóp zwrotu stosuje się przeważnie tylko najprostsze metody sprawdzania tej własności. Omawiamy tu dwie z nich: test Jarque'a–Bery i wykres kwantyl-kwantyl. Załóżmy, że mamy ciąg obserwacji (próbę) $r_1, \dots, r_T$.

test Jarque'a–Bery;
hipoteza zerowa:
rozkład jest
normalny

1. Test Jarque'a–Bery (1980) (najpopularniejszy test normalności) oparty jest na statystyce:

$$JB_T = \frac{T}{6} b_1^2 + \frac{T}{24} (b_2 - 3)^2 \quad (1.3)$$

gdzie: b_1 jest empirycznym współczynnikiem skośności:

$$b_1 = \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^3}{\left(\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

a b_2 jest kurtozą empiryczną:

kurtoza empiryczna

$$b_2 = \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^4}{\left(\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \right)^2}$$

Statystyka JB_T przy hipotezie zerowej postulującej normalność ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(2)$.

2. Wykres kwantyl-kwantyl ($Q-Q$ plot)

Rozważmy ciąg obserwacji uporządkowany niemalejąco: $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$.

Niech $q_{(j)}$ będzie kwantylem rzędu $\left(j - \frac{1}{2}\right)/T$ zmiennej losowej Z mającej standardowy rozkład normalny, tzn. $P(Z \leq q_{(j)}) = \left(j - \frac{1}{2}\right)/T$. Wykres kwantyl-kwantyl dla próby $\{r_1, \dots, r_T\}$ jest zbiorem $\Gamma = \{(q_{(j)}, r_{(j)}) \in \mathbb{R}^2 \mid j = 1, \dots, T\}$.

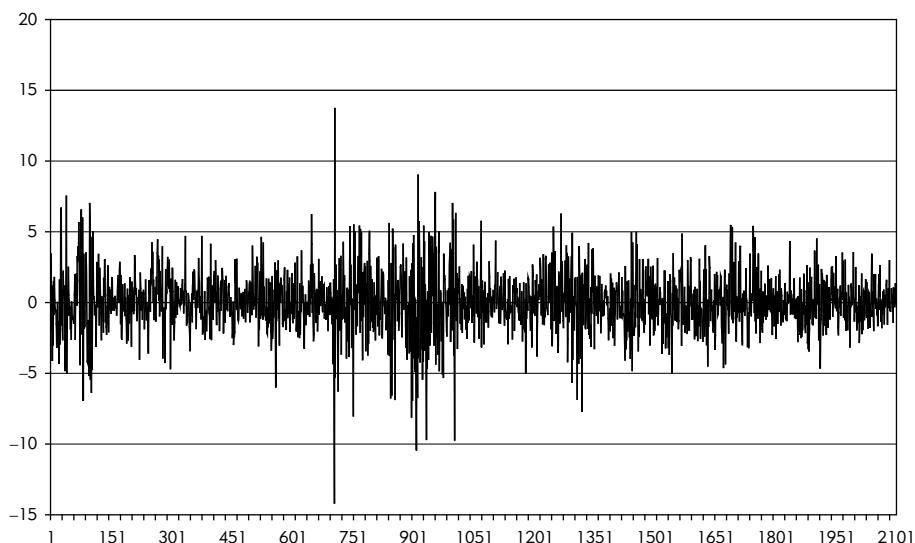
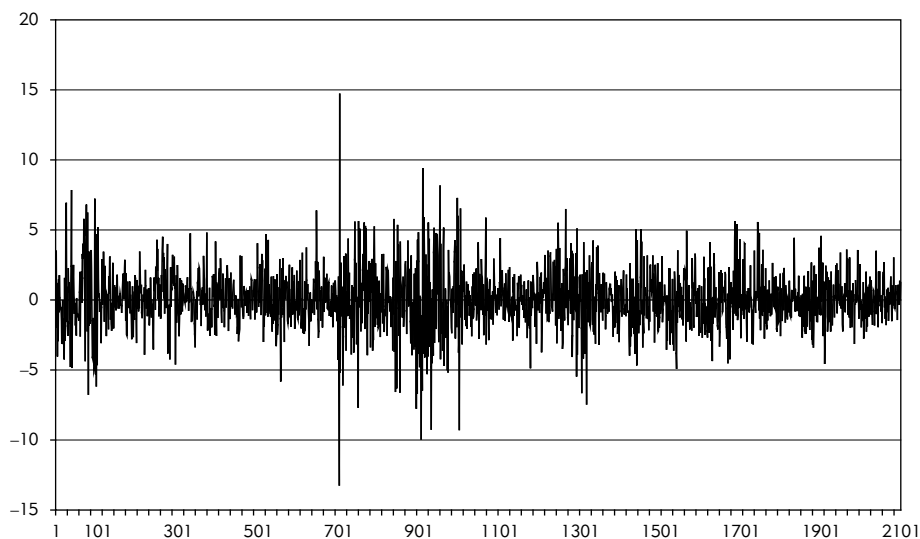
Jeśli próba $\{r_1, \dots, r_T\}$ pochodzi z rozkładu normalnego, to zbiór Γ powinien w przybliżeniu zawierać się w prostej. Fakt ten można testować, wyznaczając współczynnik korelacji z próby dla ciągów $(q_{(1)}, q_{(2)}, \dots, q_{(T)})$ i $(r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(T)})$ (Johnson i Wichern 1992).

1.5. Procentowe logarytmiczne stopy zwrotu

W dalszym ciągu, często zamiast określenia *stopa zwrotu* (*rate of return*) będziemy stosować krótsze i dość powszechnie stosowane w literaturze przedmiotu określenie *zwrot* (*return*). Z powodów głównie numerycznych (problemy z działaniami na liczbach bliskich zeru), wszystkie rozważane przez nas zwroty są procentowymi zwrotami logarytmicznymi, tzn. zwrot za okres od momentu $t-1$ do t określony jest wzorem:

$$r_t = 100 (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \quad (1.4)$$

gdzie P_t oznacza cenę instrumentu finansowego w chwili t .

Ilustracja 1.1. Dienne zwroty logarytmiczne indeksu WIG20 w okresie 2.01.1995–6.06.2003**Ilustracja 1.2.** Dienne zwroty proste indeksu WIG20 w okresie 2.01.1995–6.06.2003

Tak określone zwroty są powszechnie stosowane w badaniach naukowych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Odmienne podejście obserwuje się w praktyce banków, różnych instytucji finansowych i poszczególnych inwestorów, w których częściej używane są wygodniejsze w analizie portfelowej zwroty proste:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

**powody stosowania
zwrotów
logarytmicznych**

Znane są liczne argumenty uzasadniające stosowanie zwrotów logarytmicznych w badaniach teoretycznych. Korzyści natury praktycznej są następujące:

- łatwość wyliczania zwrotu za okres dłuższy przez agregację zwrotów z podokresów:

$$r_t[k] = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}$$

- przyjmowanie przez zwrot logarytmiczny wartości z całej osi rzeczywistej, co jest istotne, gdy stosujemy w modelowaniu rozkłady prawdopodobieństwa z nieograniczonym nośnikiem (zwrot prosty przyjmuje wartości należące do przedziału $[-1, \infty)$);
- lepsze własności statystyczne;
- proces logarytmu ceny występuje często w stochastycznych równaniach różniczkowych (równaniach dyfuzji), będących podstawą modelowania zmienności w warunkach czasu ciągłego.

Jeżeli wartości bezwzględne analizowanych zwrotów nie są zbyt wysokie, to z rozwinięcia $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$, prawdziwego dla $|x| < 1$, wynika, że różnica między zwrotem logarytmicznym a zwrotem prostym jest niewielka, przy czym w porównaniu z wartością bezwzględną zwrotu prostego, wartość bezwzględna zwrotu logarytmicznego jest niedoszacowana w wypadku zwrotów dodatnich i przeszacowana w wypadku zwrotów ujemnych. Fakt ten przedstawiają ilustracje 1.1 i 1.2.

1.6. Fakty empiryczne

**zróznicowanie
charakteru
szeregów
w zależności od
segmentu rynku**

Mówiąc ogólnie o własnościach szeregów zwrotów cen instrumentów finansowych, trzeba mieć świadomość tego, że materiał statystyczny, na podstawie którego formułuje się opinie, jest w istocie bardzo niejednorodny. Nieuniknione jest zróznicowanie charakteru szeregów w zależności od segmentu rynku, z którego pochodzą. Na

przykład, zwroty cen akcji mają nieco inne własności niż zwroty notowań indeksów albo zwroty kursów walutowych. Właściwości szeregu zależą również od częstotliwości obserwacji. Można jednak wyróżnić pewną grupę cech pojawia-

jących się w wynikach badań empirycznych, które to cechy są charakterystyczne dla przeważającej większości finansowych szeregów zwrotów logarytmicznych. Prawidłowości te wychwycone w wyniku analizy statystycznej wskazują na to, że mimo swojej różnorodności szeregi zwrotów finansowych mają istotne cechy wspólne. Literatura na temat tych własności, noszących w języku angielskim nazwę *stylized facts*, jest bogata.

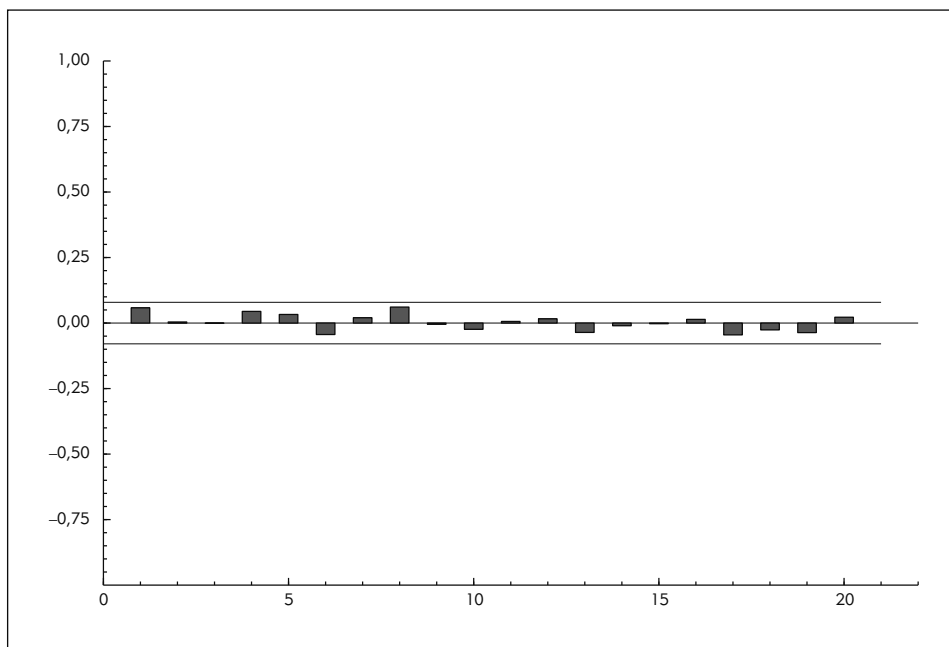
stylized facts

Omówimy obecnie najczęściej opisywane fakty empiryczne. Jako ilustracje tych faktów podajemy przykłady pochodzące głównie z polskiego rynku finansowego. Są to zarówno przykłady potwierdzające omawianą prawidłowość, jak i świadczące o występujących, zwłaszcza na polskim rynku finansowym, odstępstwach od niej. Przedstawione tu przykłady dotyczą na ogół dziennych stóp zwrotu, ale omawiane własności, w mniejszym lub większym stopniu, dotyczą też danych o innych częstotliwościach.

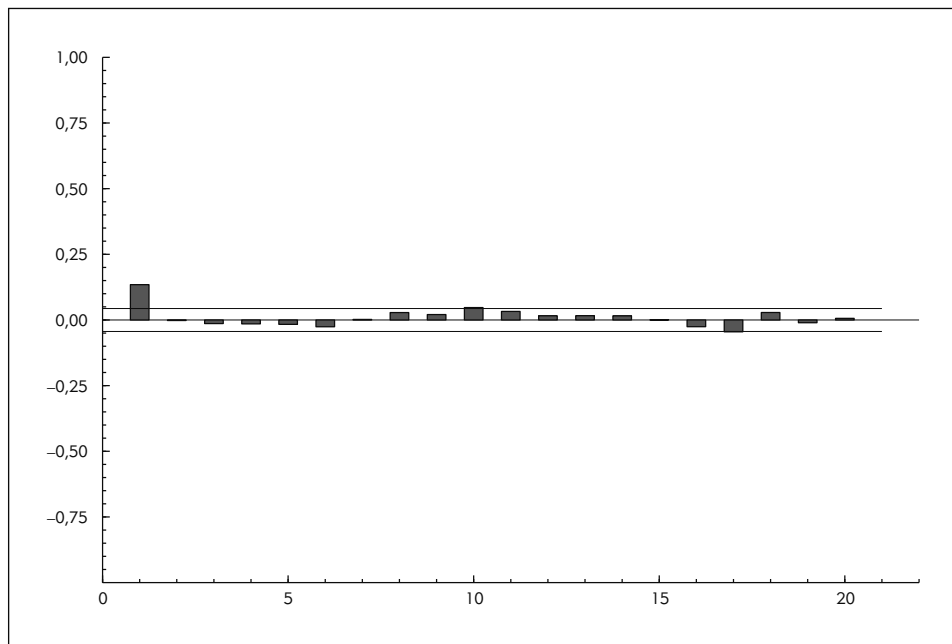
1.6.1. Brak autokorelacji

Autokorelacja w szeregach zwrotów jest z reguły statystycznie nieistotna, z wyjątkiem zwrotów śróddziennych, w których zwykle pojawia się ona jako efekt tzw. mikrostruktury rynku. Na ilustracjach 1.3 i 1.4 przedstawiono przykłady dotyczące braku autokorelacji.

Ilustracja 1.3. Brak autokorelacji w szeregach zwrotów finansowych. Przykład potwierdzający prawidłowość: zwroty indeksu WIG20 w okresie 17.11.2000–6.06.2003



Ilustracja 1.4. Brak autokorelacji w szeregach zwrotów finansowych. Przykład sprzeczności z regułą: zwroty indeksu WIG w okresie 2.01.1995–6.06.2003



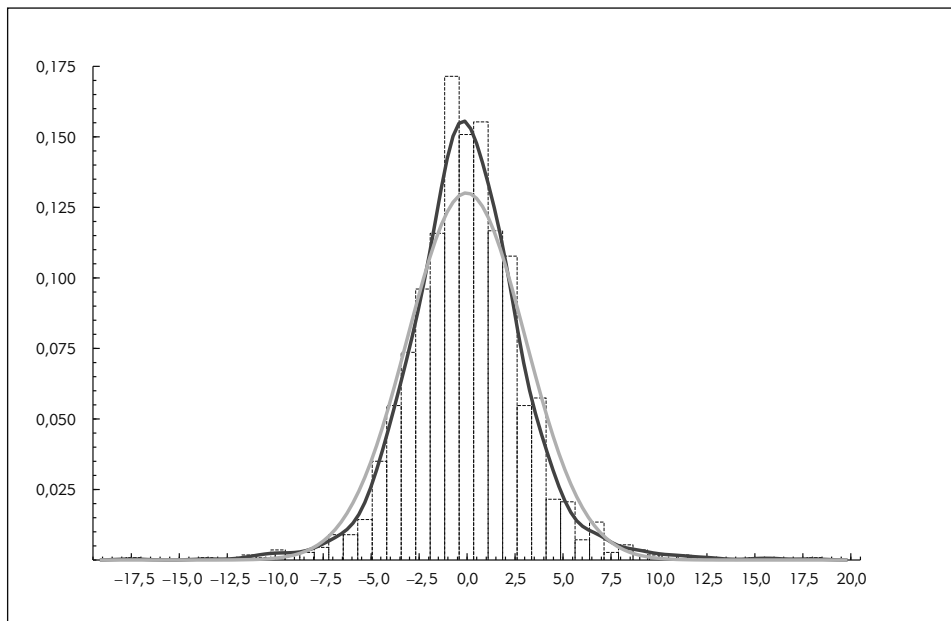
1.6.2. Grube ogony rozkładów i leptokurtoza

grube ogony rozkładów stóp zwrotu

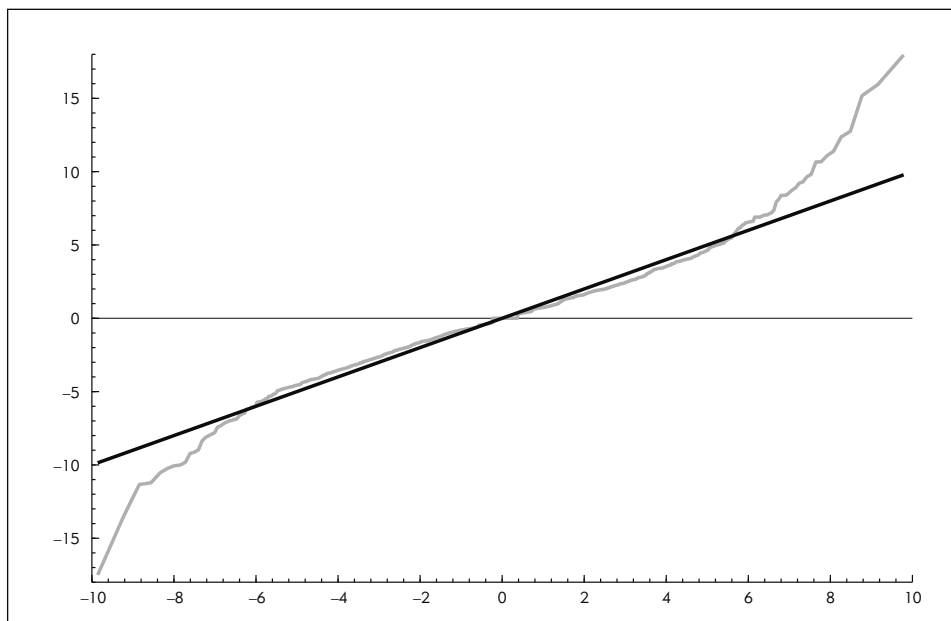
Badania empiryczne powszechnie potwierdzają występowanie grubych ogonów w bezwarunkowych rozkładach zwrotów instrumentów finansowych (ilustracje 1.5 i 1.6). Typowe oszacowania kurtozy mieszczą się w granicach od 4 do 50, co wskazuje na duże odstępstwo od rozkładu normalnego. Indeks ogona rozkładu rozumiany jako rząd k najwyższego momentu bezwzględnego, który jest skończony, lub $k = \infty$, gdy wszystkie momenty są skończone, przyjmuje zwykle wartości pomiędzy 2 a 5, co wyklucza rozkład normalny.

Grube ogony rozkładów stóp zwrotu oznaczają stosunkowo duże prawdopodobieństwo występowania obserwacji ekstremalnych.

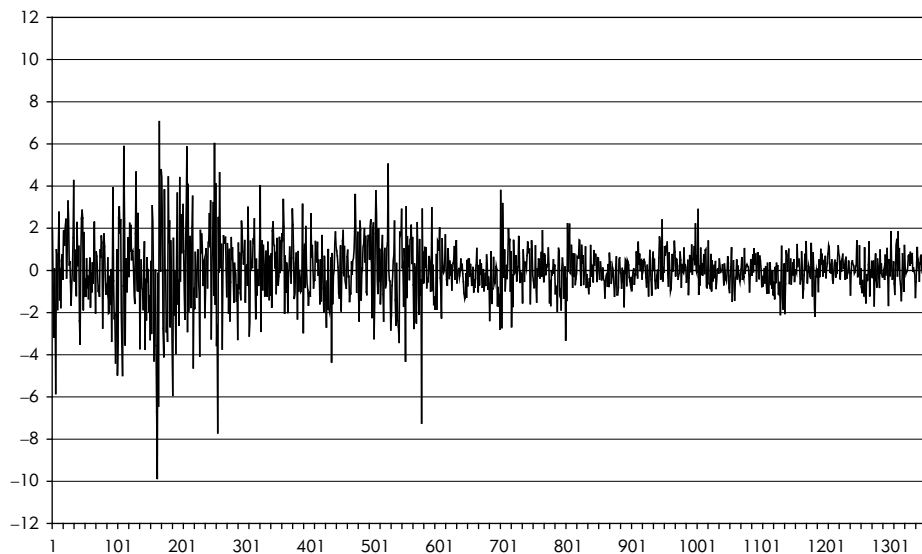
Ilustracja 1.5. Grube ogony rozkładów i leptokurtoza. Przykład potwierdzający regułę: zwroty notowań spółki KGHM w okresie 7.01.1997–6.06.2003 (empiryczna kurtoza = 6,5738; empiryczna skośność = 0,2495)



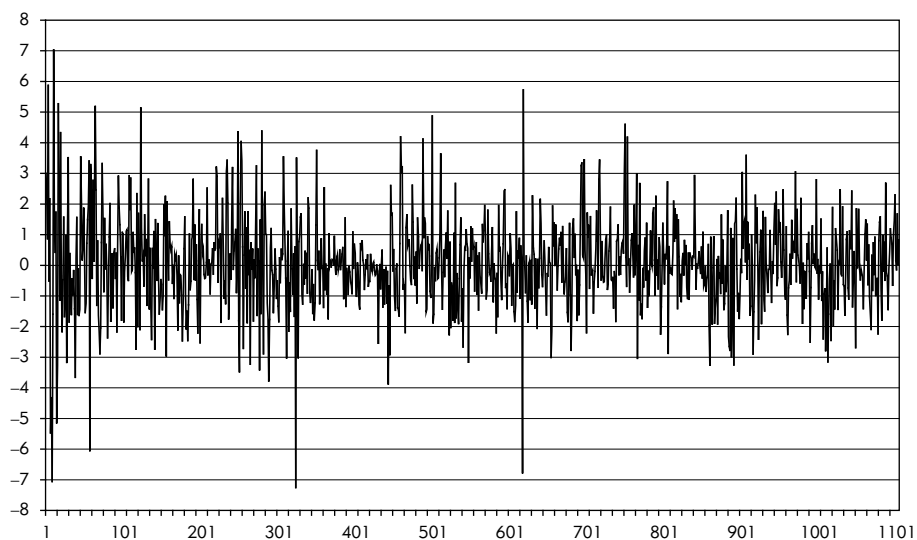
Ilustracja 1.6. Wykres kwantyl-kwantyl dla zwrotów notowań spółki KGHM w okresie 7.01.1997–6.06.2003



Ilustracja 1.7. Asymetria spadków i wzrostów. Przykład zgodności z regułą: zwroty indeksu MIDWIG w okresie 5.01.1998–6.06.2003



Ilustracja 1.8. Asymetria spadków i wzrostów. Przykład na sprzeczność z regułą: zwroty subindeksu WIG-banki w okresie 4.01.1999–6.06.2003



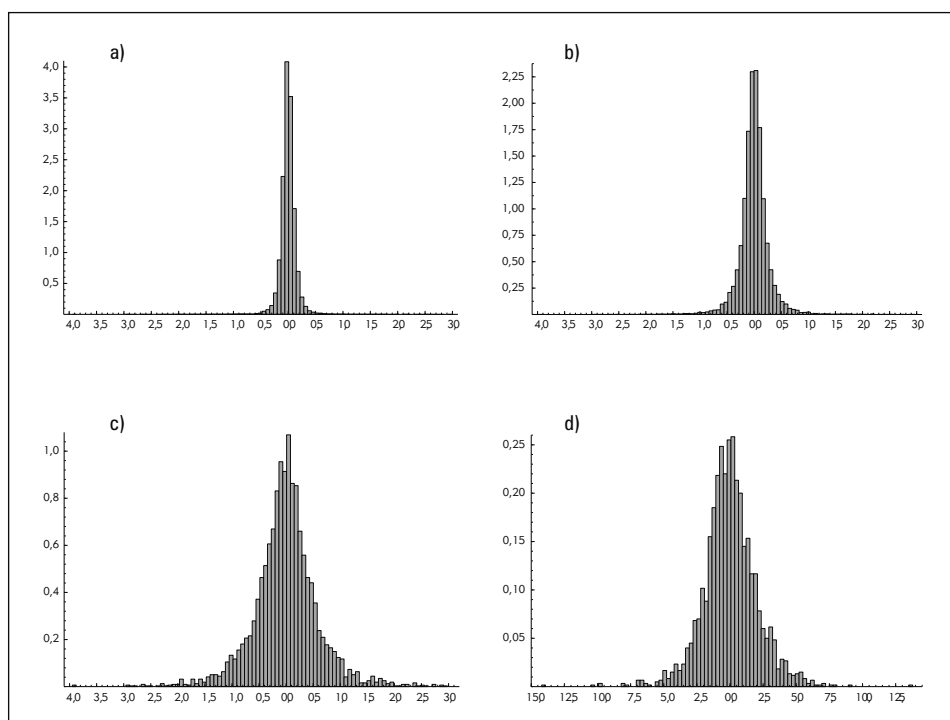
1.6.3. Asymetria spadków i wzrostów

W szeregach notowań akcji i indeksów giełdowych znaczne ruchy w dół często są co do wartości bezwzględnej większe niż znaczne wzrosty (ilustracje 1.7 i 1.8). Cecha ta rzadko pojawia się w szeregach kursów walutowych.

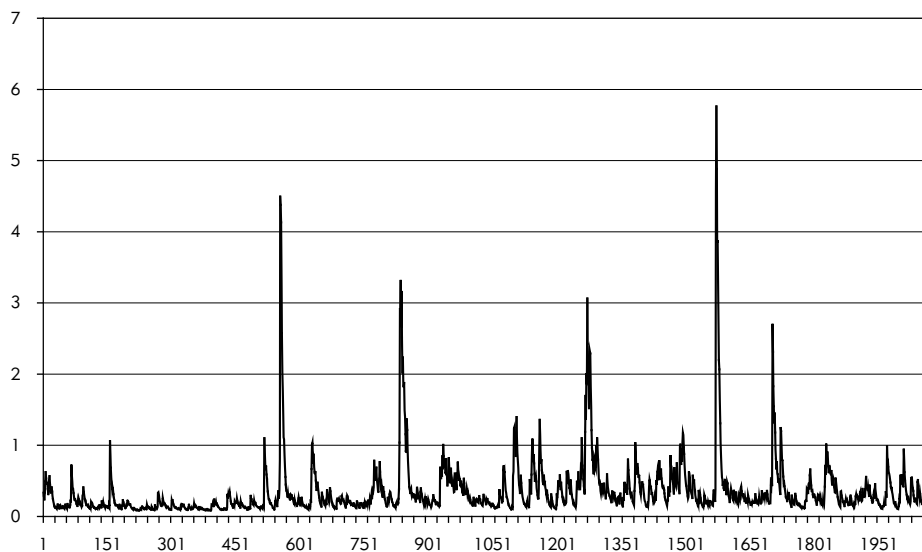
1.6.4. Dążenie do normalności przy agregacji

Przy zwiększaniu jednostki skali czasowej, względem której obliczane są zwroty, rozkład zwrotów upodabnia się do normalnego, a zatem kształt rozkładu zależy od skali czasowej (ilustracja 1.9).

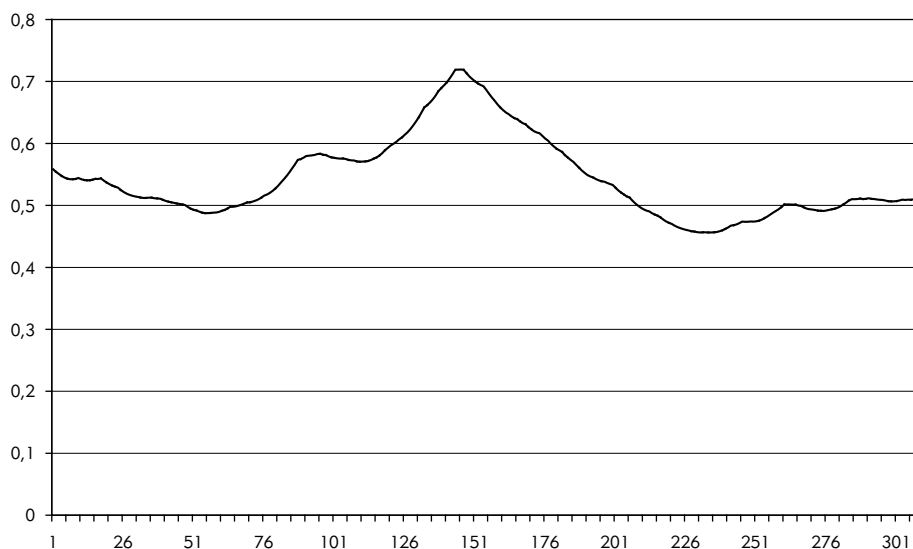
Ilustracja 1.9. Dążenie do normalności przy agregacji. Przykład zgodności z regułą: zwroty pięciominutowe (a), piętnastominutowe (b), godzinne (c) i dzienne (d) indeksu WIG20



Ilustracja 1.10. Wahliwość. Przykład potwierdzający regułę: dzienna zmienność kursu walutowego USDPLN w okresie 2.01.1995–31.12.2002, wyestymowana za pomocą modelu APARCH. Widoczne powtarzające się okresy podwyższonej zmienności



Ilustracja 1.11. Wahliwość. Przykład niezgodności z regułą: dzienna zmienność kursu walutowego USDEUR w okresie 12.04.2000–7.03.2003, wyestymowana za pomocą modelu SV



1.6.5. Wahliwość zmienności

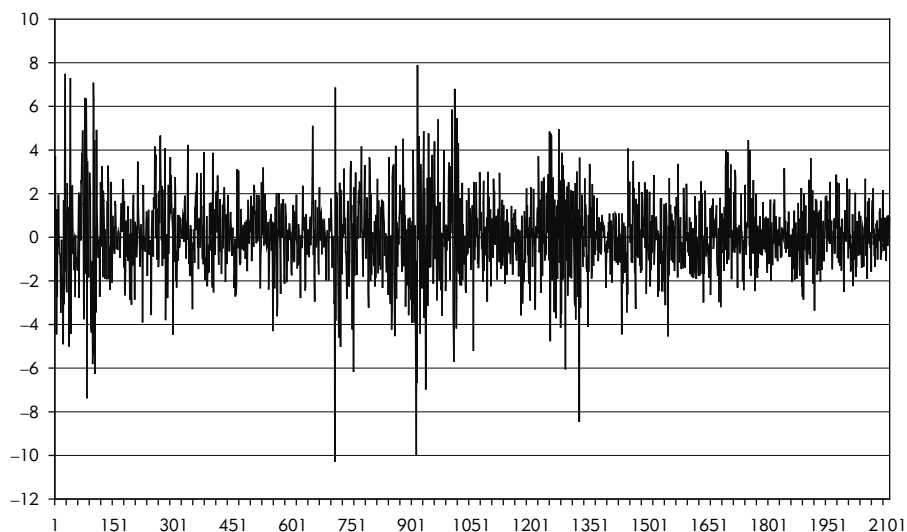
Zwroty wykazują – niezależnie od skali czasu – wysoki poziom wahliwości (ilustracje 1.10 i 1.11). Przejawia się on np. w tym, że w szeregach zmienności, bez względu na przyjęty sposób jej estymowania, pojawiają się okresy znacznie podwyższonego jej poziomu.

1.6.6. Zgrupowania zmienności

Po dużych ruchach cen występują często duże zmiany i podobnie po małych małe. Niezależnie od stosowanej miary zmienności charakterystyczne dla szeregów zwrotów jest występowanie okresów podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej (ilustracja 1.12). Jest to związane z dodatnią autokorelacją występującą w szeregach zmienności i uwidacznia się w postaci zgrupowań zmienności (*volatility clusters*).

**zgrupowania
zmienności
a występowanie
dodatniej
autokorelacji
w szeregach
zmienności**

Ilustracja 1.12. Zwroty logarytmiczne indeksu WIG w okresie 2.01.1995–6.06.2003



1.6.7. Powracanie zmienności do średniej

Czasami formułuje się przekonanie, że po okresie podwyższonej zmienności następuje jej powrót do pewnego „normalnego” poziomu oraz że podobny powrót występuje po okresie zaniżonej zmienności. W długim okresie zmienność powinna powracać do określonego średniego poziomu. Uważa się, że jest to charakterystyczna cecha zmienności, aczkolwiek nie jest jasne, jaki jest ten „normalny” poziom ani czy jest on stały w czasie i nie zależy od zmian instytucjonalnych.

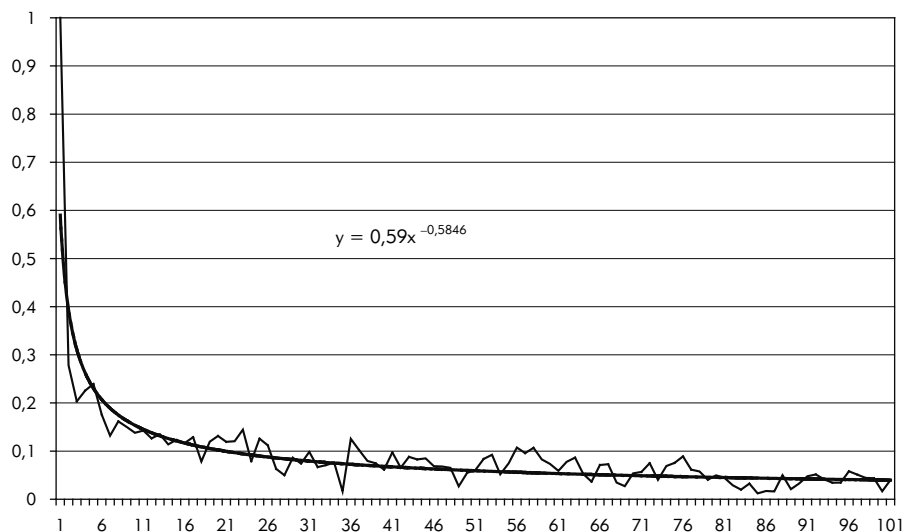
1.6.8. Grube ogony rozkładów warunkowych

Rozkłady warunkowe zwrotów również cechują się grubymi ogonami. Własność ta nie zanika zupełnie nawet po modyfikacji szeregu uwzględniającej zgrupowania zmienności, np. przez zastosowanie modeli typu GARCH. Szeregi reszt tych modeli nadal wykazują grube ogony (w nieco mniejszym stopniu).

1.6.9. Powolne zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych

Autokorelacja z próby w szeregach wartości bezwzględnych stóp zwrotu zanika wolno, w tempie funkcji potęgowej o wykładniku od około $-0,2$ do $-0,6$ (ilustracja 1.13). Często uznaje się to za oznakę występowania zależności długoterminowej.

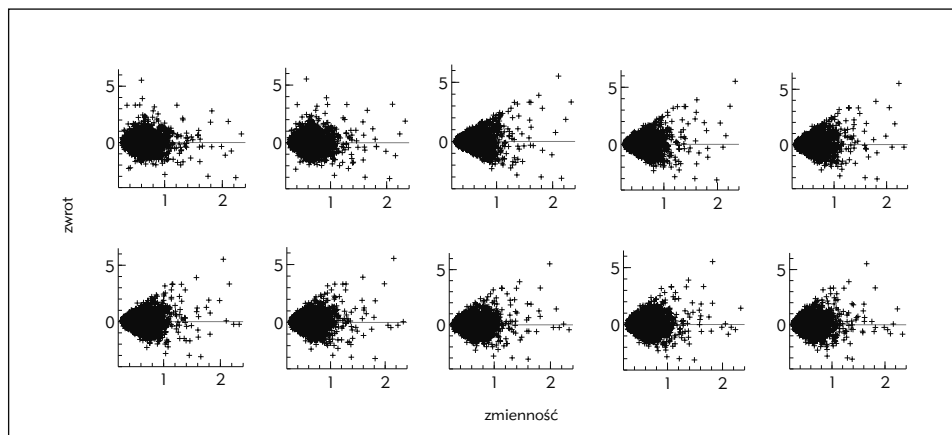
Ilustracja 1.13. Powolne zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych. Funkcja autokorelacji z próby dla zwrotów bezwzględnych indeksu WIG maleje w tempie funkcji potęgowej o wykładniku około $-0,58$



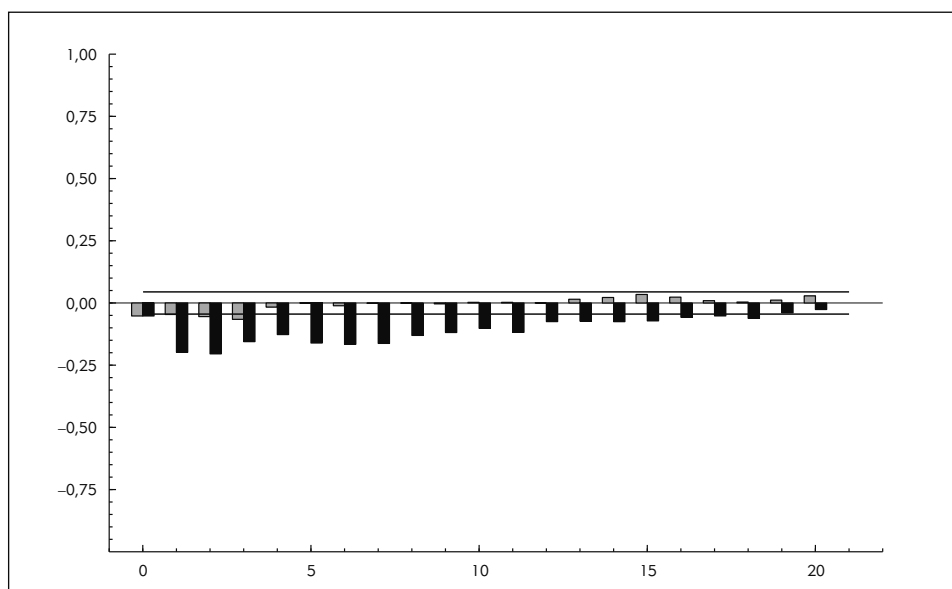
1.6.10. Efekt dźwigni

Zmienność w wypadku większości stosowanych miar jest ujemnie skorelowana z wielkością zwrotu (ilustracje 1.14 i 1.15).

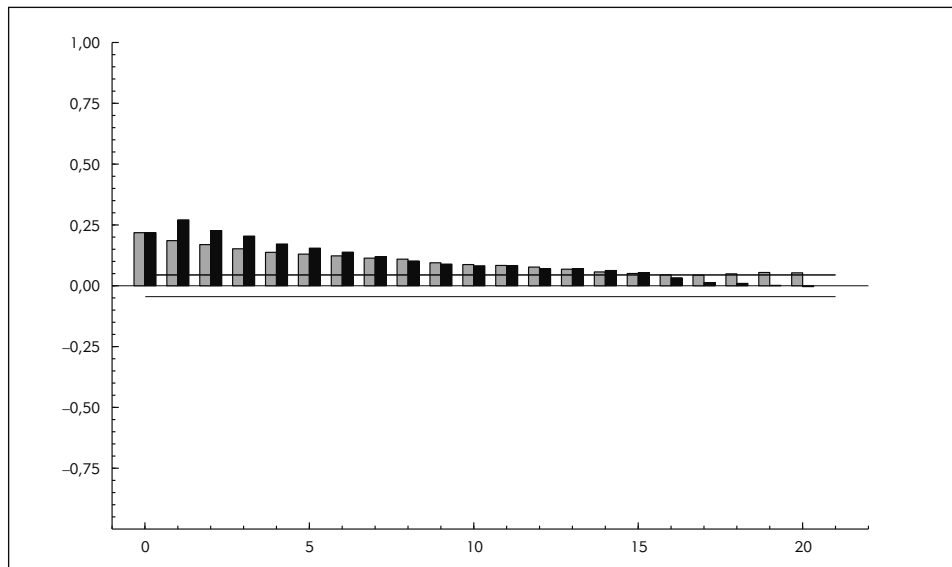
Ilustracja 1.14. Efekt dźwigni. Przykład sprzeczności z regułą: wykresy punktowe zmienności wyestymowanej za pomocą modelu GARCH i zwrotów dla kursu EUR/PLN. Opóźnienia dla zwrotów zmieniają się od 0 do 9. Okres 16.05.1995–30.05.2003. Małym bezwzględnym wartościom zwrotów odpowiada mała zmienność, a dużym – duża. Brak ujemnej korelacji między zwrotami a zmiennością



Ilustracja 1.15. Efekt dźwigni. Przykład zgodności z regułą: Mostostal. Ujemne korelacje między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością zwrotu. Okres 04.05.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnionym zwrotem (jasne słupki), korelacje pomiędzy zwrotem a opóźnionym wolumenem (ciemne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień



Ilustracja 1.16. Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu. Przykład zgodności z regułą: Mostostal. Dodatnie korelacje między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością wolumenu obrotu. Okres 4.05.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnioną zmiennością (ciemne słupki), korelacje pomiędzy zmiennością a opóźnionym wolumenem (jasne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień



Ilustracja 1.17. Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu. WIG. Stosunkowo słaby związek między zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH a wielkością wolumenu obrotu. Okres 2.01.1995–6.06.2003. Korelacje pomiędzy wolumenem a opóźnioną zmiennością (jasne słupki), korelacje pomiędzy zmiennością a opóźnionym wolumenem (ciemne słupki). Na osi poziomej liczby opóźnień

