

Jerzy Ginter

Symetria w fizyce materii



Symetria w fizyce materii

Jerzy Ginter

Symetria w fizyce materii



Recenzenci

Rajmund Bacewicz

Marian Grynberg

Krzysztof A. Meissner

Redaktor prowadzący

Małgorzata Yamazaki

Redakcja

Małgorzata Kopczyńska

Redakcja techniczna

Zofia Kosińska

Korekta

Izabela Mika

Projekt okładki i stron tytułowych

Edwin Radzikowski

Skład i łamanie

Marcin Szcześniak

ISBN 978-83-235-2578-3 (druk)

ISBN 978-83-235-2586-8 (pdf online)

ISBN 978-83-235-2594-3 (e-pub)

ISBN 978-83-235-2403-8 (mobi)

© Copyright by Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego,
Warszawa 2017

Publikacja dofinansowana przez Rektora Uniwersytetu Warszawskiego
oraz Wydział Fizyki UW

Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego

00-497 Warszawa, ul. Nowy Świat 4

e-mail: wuw@uw.edu.pl

Księgarnia internetowa: www.wuw.pl

Wydanie 1, Warszawa 2017

Spis treści

Przedmowa	11
Wstęp	15
Część I. W świecie geometrii elementarnej	
1. Izometrie w dwóch wymiarach	21
1.1. Wstęp	21
1.2. Izometrie w dwóch wymiarach w geometrii elementarnej	22
1.3. Składanie izometrii	24
1.4. Wynik złożenia izometrii w dwóch wymiarach	28
1.5. Izometrie sprzężone	28
1.6. Przekształcanie wektora	30
1.7. Iloczyn skalarny	32
1.8. Przekształcanie funkcji	32
2. Przekształcenia symetrii w dwóch wymiarach	35
2.1. Symetrie figur płaskich	35
2.2. Symetria kwadratu	36
2.3. Składanie operacji symetrii	38
2.4. Tabela grupowa	40
2.5. Grupa przekształceń	41
2.6. Psujemy kwadrat, czyli przykłady podgrup	42
2.7. Symetrie wielokątów foremnych o parzystej liczbie boków	46
2.8. Symetria trójkąta równobocznego	46
2.9. Układy o symetrii obrotowej bez odbić	47
2.10. Symetrie sprzężone	48
2.11. Klasy elementów sprzężonych	50
3. Symetria obrazów dyfrakcyjnych	52
3.1. Symetria obrazów dyfrakcji światła na otworach	52
3.2. Wyniki doświadczenia dla otworu kwadratowego	52
3.3. Dyfrakcja w granicy Fraunhofera	53
3.4. Opis dyfrakcji na otworze kwadratowym w granicy Fraunhofera	56

3.5. Wyniki doświadczenia dla otworu trójkątnego	57
3.6. Symetria obrazu dla otworu trójkątnego w granicy Fraunhofera	58
3.7. Iloczyn prosty grup	60
3.8. Opis dyfrakcji na otworze trójkątnym w granicy Fraunhofera	61
3.9. Symetria obrazów dyfrakcyjnych siatek płaskich	62
4. Izometrie w trzech wymiarach.	64
4.1. Izometrie w trzech wymiarach: obrót, odbicie, inwersja	64
4.2. Składanie izometrii w trzech wymiarach.	67
4.3. Izometrie w trzech wymiarach: obroty zwierciadlane i obroty inwersyjne	70
4.4. Wynik złożenia izometrii w trzech wymiarach	73
4.5. Złożenie odbicia i obrotu.	76
4.6. Izometrie sprzężone	77
4.7. Przekształcenia wektorów	81
4.8. Przekształcenia funkcji.	83
4.9. Pseudowektory	84
4.10. Transformacje pseudowektorów	86
5. Symetrie w trzech wymiarach	89
5.1. Symetrie w trzech wymiarach	89
5.2. Symetrie sześciangu	90
5.3. Symetria ośmiościanu i kubo-ośmiościanu	94
5.4. Graficzne przedstawianie układów atomów	94
5.5. Układy atomów o symetrii sześciangu lub ośmiościanu	95
5.6. Składanie symetrii i symetrie sprzężone	96
5.7. Psujemy sześciang. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej	97
5.8. Psujemy sześciang. Prostopadłościan dowolny	99
5.9. Psujemy sześciang. Romboedr.	100
5.10. Symetrie czworościanu.	100
5.11. Symetrie wybranych układów atomów	103
6. Momenty dipolowe	106
6.1. Rozważania wstępne, pole układu ładunków o symetrii sferycznej.	106
6.2. Elektryczny moment dipolowy	108
6.3. Elektryczny moment dipolowy cząsteczek	111
6.4. Elektryczny moment dipolowy a symetria układu	114
6.5. Niezmienniczość wektora	118
6.6. Przekształcanie funkcji a moment dipolowy	120
6.7. Magnetyczny moment dipolowy	120
6.8. Moment magnetyczny w mikroświecie	122
6.9. Magnetyczny moment dipolowy a symetria układu	125
7. Grupy przekształceń	128
7.1. Wstęp	128
7.2. Grupy symetrii	128
7.3. Dygresja: inne grupy	130
7.4. Generatory grupy	132
7.5. Podgrupy	134
7.6. Twierdzenie Lagrange'a	136
7.7. Klasy elementów sprzężonych	139
7.8. Podgrupy niezmiennicze	141

Część II. W świecie geometrii analitycznej

8. Macierze izometrii w dwóch wymiarach	147
8.1. Macierzowy zapis wektorów	147
8.2. Iloczyn skalarny	148
8.3. Macierze izometrii w dwóch wymiarach	149
8.4. Macierze obrotów w dwóch wymiarach	150
8.5. Transformacja wektorów bazy przy obrocie	153
8.6. Macierze odbić w dwóch wymiarach	156
8.7. Transformacja wektorów bazy przy odbiciu	159
8.8. Składanie macierzy izometrii	160
8.9. Przykłady składania izometrii w dwóch wymiarach	160
8.10. Macierze odwrotne	162
8.11. Przekształcanie funkcji	163
9. Ogólne własności macierzy izometrii w dwóch wymiarach	167
9.1. Zachowanie długości wektorów, macierze ortogonalne	167
9.2. Macierze izometrii sprzężonych	169
9.3. Zmiana układu współrzędnych	170
9.4. Sens współczynników q_{nm}	174
9.5. Transformacja współrzędnych przy obrocie i odbiciu	175
9.6. Odwrotna transformacja współrzędnych	177
9.7. Transformacja wektorów bazy	178
9.8. Transformacja macierzy izometrii	178
9.9. Niezmienniki zmiany współrzędnych	180
9.10. Transformacja funkcji przy zmianie układu współrzędnych	181
10. Macierze symetrii w dwóch wymiarach	184
10.1. Macierze przekształceń symetrii kwadratu	184
10.2. Grupy macierzowe przekształceń symetrii	188
10.3. Reprezentacje macierzowe grup przekształceń	191
10.4. Symetrie prostokąta i rombu	191
10.5. Reprezentacje równoważne	192
10.6. Symetrie trójkąta równobocznego	192
10.7. Przekształcanie funkcji typu p pod wpływem operacji symetrii kwadratu	193
10.8. Przekształcanie funkcji typu d pod wpływem operacji grupy kwadratu	195
10.9. Przekształcanie funkcji typu d pod wpływem operacji symetrii grupy ośmiokątnej	198
11. Macierze izometrii w trzech wymiarach	201
11.1. Transformacje wektorów	201
11.2. Składanie macierzy izometrii	203
11.3. Ogólne własności macierzy izometrii w trzech wymiarach	204
11.4. Obrót w trzech wymiarach	206
11.5. Ślad macierzy izometrii sprzężonych	211
11.6. Odbicie w trzech wymiarach	211
11.7. Inwersja i obroty inwersyjne	214
11.8. Macierze transformacji pseudowektorów	216
11.9. Wyznacznik i ślad macierzy transformacji pseudowektorów	218
12. Macierze symetrii w trzech wymiarach	219
12.1. Macierze symetrii grupy sześciangu	219

12.2. Macierze symetrii prostopadłościanu ogólnego	221
12.3. Macierze symetrii ostrosłupa o podstawie trójkątnej	222
12.4. Popsuty sześcián	223
12.5. Macierze transformacji wektora i pseudowektora pod wpływem operacji grupy symetrii ostrosłupa o podstawie prostokątnej	227
13. Macierze przekształceń w zastosowaniach fizycznych	230
13.1. Elektryczny moment dipolowy cząsteczek	230
13.2. Indukowany elektryczny moment dipolowy	233
13.3. Symetria tensora polaryzowalności	236
13.4. Przykład 1. Symetria obrotowa wokół osi 3	237
13.5. Przykład 2. Symetria prostopadłościanu	240
13.6. Przykład 3. Symetria czworościanu	241
13.7. Przykład makroskopowy: kula przewodząca	242
13.8. Przykład makroskopowy: obrotowa elipsoida przewodząca	244
13.9. Przykłady mikroskopowe: półklasyczny model atomu wodoru	246
13.10. Polaryzowalność atomów	249
13.11. Polaryzowalność cząsteczek	251
13.12. Tensor bezwładności	253
 Część III. W świecie reprezentacji	
14. Drgania membran	259
14.1. Wstęp	259
14.2. Dwuwymiarowe klasyczne równanie falowe	261
14.3. Zmiana układu współrzędnych	263
14.4. Fale na membranie kwadratowej	265
14.5. Formalny opis fal na membranie kwadratowej	266
14.6. Przerabiamy uzyskane wyniki	271
14.7. Wstępne rozważania dotyczące symetrii funkcji falowych	273
14.8. Mody zdegenerowane 21 i 12, funkcje rzeczywiste	277
14.9. Mody zdegenerowane 21 i 12, funkcje zespolone	281
14.10. Różne wybory bazy rozwiązań równania falowego	285
14.11. Degeneracje przypadkowe, n i m nieparzyste	287
14.12. Degeneracje przypadkowe, n i m parzyste	291
14.13. Podsumowanie	293
15. Reprezentacje grupy kwadratu	295
15.1. Macierzowa reprezentacja grupy	295
15.2. Reprezentacje grupy kwadratu	297
15.3. Reprezentacje równoważne	301
15.4. Reprezentacje równoważne grupy kwadratu. Macierze rzeczywiste	302
15.5. Reprezentacje równoważne grupy kwadratu. Macierze zespolone	305
15.6. Macierze ortogonalne, macierze unitarne	307
15.7. Reprezentacje przywiedlne i nieprzywiedlne	309
16. Reprezentacje grup	314
16.1. Co już wiemy o reprezentacjach	314
16.2. Własności symetrii rozwiązań równania liniowego	316
16.3. Operator Laplace'a	318
16.4. Niezmienniki reprezentacji	320

16.5. Charaktery operacji symetrii należących do tej samej klasy	323
16.6. Reprezentacja regularna	323
16.7. Przykład reprezentacji regularnej, grupa symetrii prostokąta	325
16.8. Przykład reprezentacji regularnej, grupa symetrii kwadratu	328
17. Relacje ortogonalności	332
17.1. Pytania	332
17.2. Sformułowanie relacji ortogonalności	332
17.3. Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji jest skończona	337
17.4. Ile nieprzywiedlnych reprezentacji ma grupa?	338
17.5. Kryteria przywiedlności reprezentacji	340
18. Małe drgania	342
18.1. Wstęp	342
18.2. Dwie masy na gumce	342
18.3. Inne spojrzenia na problem	344
18.4. Energia potencjalna układu	345
18.5. Spojrzenie trochę ogólniejsze	347
18.6. Układ 4 mas	349
18.7. Układ 4 mas o symetrii kwadratu	351
18.8. Układ 8 mas o symetrii kwadratu	354
18.9. Drgania cząsteczek	359
19. Symetria związanych stanów elektronowych	361
19.1. Równanie Schrödingera	361
19.2. Nieskończona kwadratowa studnia potencjału	361
19.3. Nieskończona kwadratowa studnia potencjału, degeneracje przypadkowe	365
19.4. Nieskończona kwadratowa studnia potencjału, konsekwencje degeneracji wynikających z symetrii	369
19.5. Gęstość prądu prawdopodobieństwa	371
19.6. Metoda LCAO, cząsteczka wodoru	374
19.7. Cząsteczka czteroatomowa	378
19.8. Znoszenie degeneracji stanów atomowych przez zaburzenie zewnętrzne, model dwuwymiarowy	381
19.9. Znoszenie degeneracji stanów atomowych przez zaburzenie zewnętrzne	383
A. Jednostki układu CGSE	387
B. Izometria w dwóch wymiarach jest albo obrotem, albo odbiciem	391
C. Izometria w trzech wymiarach jest albo obrotem, albo obrotem inwersyjnym	394
D. Tensor polaryzowalności jest symetryczny	399
E. Dwuwymiarowe klasyczne równanie falowe	404
Literatura	408
Źródła fotografii	409

Przedmowa

Człowiek zajmujący się fizyką materii, na przykład optyką molekularną czy fizyką ciała stałego, niemal automatycznie analizuje symetrię badanych przez siebie obiektów. Bo na przykład:

- Od symetrii cząsteczki zależy, czy ma ona moment dipolowy. A to ma istotny wpływ na to, jaka jest przenikalność elektryczna złożonej z tych cząsteczek substancji.
- Od symetrii cząsteczek w wodnych roztworach substancji organicznych zależy, czy skręcają one płaszczyznę polaryzacji przechodzącego przez ośrodek światła¹.
- Symetria kryształu o wiązaniach jonowych lub spolaryzowanych decyduje o tym, czy ma on właściwości piezoelektryczne.
- Jeżeli wbudować atom grupy d (jak chrom) w przezroczysty kryształ o wiązaniu jonowym (na przykład korund Al_2O_3), atomowe stany d ulegają rozszczepieniu, które zależy od symetrii otoczenia tego atomu. Przejścia pomiędzy powstałymi w ten sposób stanami prowadzą do pojawienia się zabarwienia (korund domieszkowany chromem to rubin).

Przykłady można by mnożyć w nieskończoność.

W gruncie rzeczy jest aż dziwne, jak niewiele z tej tematyki znajduje się w nauczaniu szkolnym i w ramach pierwszego stopnia typowego kursu fizyki.

W programie szkoły średniej problemy symetrii stanowią zupełny margines. Pewne elementy pojawiają się w matematyce, w ramach planimetrii i stereometrii – zwykle jednak bez żadnego nawiązania do fizyki. W chemii mówi się trochę o symetrii cząsteczek, na przykład przy rozważaniu ich momentów dipolowych czy skręcania płaszczyzny polaryzacji przez roztwory związków organicznych. O przykładach tych mówiliśmy już wyżej. Trudno wskazać natomiast, gdzie tematyka ta omawiana byłaby szerzej w programie fizyki. Dlatego dla studentów rozpoczynających studia fizyki problematyka symetrii jest niemal zupełnie obca.

¹ Obserwacje skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez roztwory różnych odmian kwasu winowego doprowadziły chemika Ludwika Pasteura do tego, że zajął się badaniami bakterii. Konsekwencje tej decyzji są ogólnie znane!

Zagadnienia symetrii pojawiają się oczywiście stale w typowym kursie fizyki pierwszych lat studiów. Na przykład w mechanice – przy omawianiu momentu bezwładności brył sztywnych. W elektromagnetyzmie – przy rozważaniu pól układów ładunków. W optyce – przy omawianiu dyfrakcji na otworach czy zjawiska dwójłomności. Śladowo – w elementach mechaniki kwantowej (choć znany podręcznik Landaua i Lifszycza poświęcał im cały rozdział). Szerzej – we wstępie do optyki i fizyki ciała stałego. W tych przedmiotach często symetrii poświęca się kilka wykładów wprowadzających². Wszystko to są jednak wątki słabo ze sobą powiązane.

Problematyka symetrii niemal nie pojawia się w matematyce pierwszych dwóch lat studiów. Na Wydziale Fizyki UW, na trzecim roku, wśród przedmiotów do wyboru, istnieje wykład teorii grup. Jest on jednak prowadzony na bardzo wysokim poziomie abstrakcji, a przez to może być trudny dla wielu studentów bardziej zainteresowanych fizyką doświadczalną.

Omawiana książka ma stanowić rodzaj „pomostu” pomiędzy wiedzą wyniesioną przez studentów ze szkoły średniej i dwóch pierwszych lat studiów, a zaawansowanym i sformalizowanym wykładem teorii grup. Nie jest to podręcznik – choćby dlatego, że na naszym wydziale nie ma wykładu o tej tematyce. Powstała na bazie wykładu monograficznego, który autor prowadził wiele lat temu na Uniwersytecie Śląskim, dla studentów trzeciego roku i wyższych lat. Stąd pewna dowolność w ujęciu materiału. Często zagadnienia nie są omawiane w pełnej ogólności, ale ograniczają się do prostych przykładów, pozwalających jednak uchwycić istotę zagadnienia. Autor chciałby przede wszystkim, aby Czytelnik poznał pewien sposób patrzenia na rzeczywistość fizyczną, powszechnie stosowany w fizyce materii.

Problematyka symetrii w fizyce jest niezmiernie rozległa. W tej książce zajmujemy się przede wszystkim geometrycznymi symetriami tworów skończonych, takich jak cząsteczki chemiczne. Omawiać będziemy niemal wyłącznie:

- symetrie punktowe, czyli zachowujące co najmniej jeden punkt rozważanego obiektu;
- układy, które mają skończoną liczbę przekształceń symetrii.

W zasadzie zakłada się, że czytelnik zna materiał w zakresie pierwszych dwóch lat studiów:

- z matematyki, to znaczy rachunek różniczkowy, algebrę i geometrię analityczną;
- z fizyki – mechanikę, elektromagnetyzm, optykę i elementy mechaniki kwantowej.

Część I książki ma tytuł *W świecie geometrii elementarnej*. Do jej zrozumienia w zasadzie wystarczy znajomość matematyki i fizyki ze szkoły średniej. Wyjątek stanowią ilościowe rozważania dotyczące symetrii obrazów dyfrakcyjnych oparte na wiadomościach z drugiego roku studiów. W części tej omawia się:

² Takie rozwiązanie zostało zastosowane na przykład w podręczniku Pawła Kowalczyka *Fizyka cząsteczek*.

- ogólne właściwości izometrii w dwóch i trzech wymiarach;
- przekształcenia symetrii obiektów płaskich i przestrzennych;
- najprostsze zastosowania właściwości symetrii do zagadnień fizycznych: wspomniane wyżej obrazy dyfrakcyjne i momenty dipolowe cząsteczek.

W tej części wprowadza się także pojęcie grupy przekształceń.

Część II została nazwana *W świecie geometrii analitycznej*. Zgodnie z tytułem wykorzystuje ona materiał z algebry i geometrii analitycznej z dwóch pierwszych lat typowych studiów fizyki. W tej części omawia się:

- ogólne właściwości macierzy izometrii w dwóch i trzech wymiarach;
- macierze symetrii w dwóch i trzech wymiarach;
- typowe zastosowania fizyczne, na przykład symetrie tensora polaryzowalności cząsteczek.

W tej części pojawia się pojęcie reprezentacji macierzowej grupy symetrii.

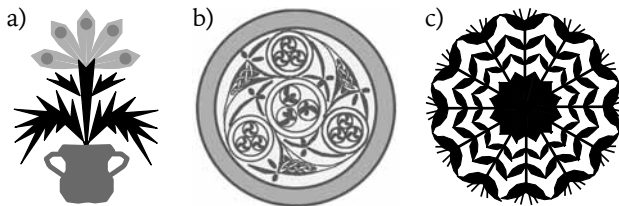
Część III ma tytuł *W świecie reprezentacji*. W niej:

- pojęcie reprezentacji grupy omawia się na prostym przykładzie – fal stojących na membranie kwadratowej;
- omawia się inne przykłady reprezentacji grup, a w szczególności wzmiankuje się o relacjach ortogonalności;
- omawia się wybrane zastosowania: małe drgania klasycznych układów oddziałujących mas i właściwości prostych związanych stanów elektronowych.

Wstęp

Kiedy mówimy o symetrii w języku potocznym, najczęściej myślimy o symetrii zwierciadlanej, którą ma na przykład fiołek czy trójkąt równoramienny (rys. W.2a, W.6a). Wiele obiektów, z którymi się stale stykamy, ma jednak także inne i bogatsze symetrie. Patrzymy na to z różnych punktów widzenia – zależnych od naszych zainteresowań.

- 1) Dla plastyka symetria stanowi podstawę klasyfikacji ornamentów, płaskich lub przestrzennych.

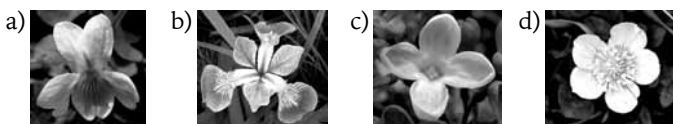


Rys. W.1. Ornamenty:

- a) symetria odbiciowa,
- b) symetria trzykrotna,
- c) symetria dwunastokrotna

- 2) Dla biologa symetria może stanowić istotny element systematyki organizmów żywych. Na przykład:

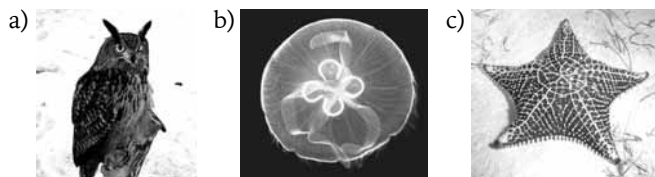
- a) Rośliny jednoliścienne mają najczęściej kwiaty o symetrii trzykrotnej, a rośliny dwuliścienne kwiaty o symetrii grzbiecistej (jak fiołek) oraz cztero- i pięciokrotnej (jak bez czy jaskier).



Rys. W.2. Kwiaty:

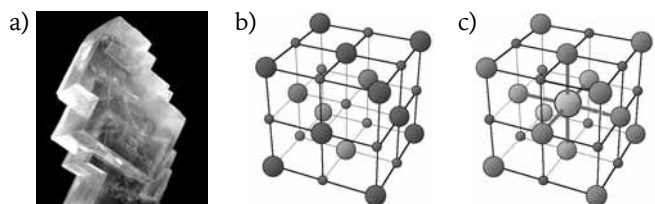
- a) symetria grzbiecista,
- b) symetria trzykrotna,
- c) symetria czterokrotna,
- d) symetria pięciokrotna

- b) Kręgowce – jak my sami – mają na ogół co najwyżej jedną zwierciadlaną płaszczyznę symetrii. Natomiast meduza ma symetrię czterokrotną, a wiele szkarłupni, jak jeżowce czy rozgwiazdy, ma ciała o pięknej symetrii pięciokrotnej.



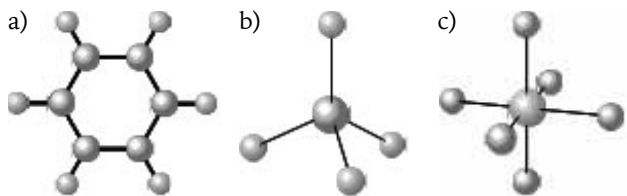
Rys. W.3. Zwierzęta:
a) symetria odbiciowa,
b) symetria czterokrotna,
c) symetria pięciokrotna

- 3) Fizyków, chemików i mineralogów interesują makroskopowe symetrie kryształów i ich związek z mikroskopową atomową budową substancji.



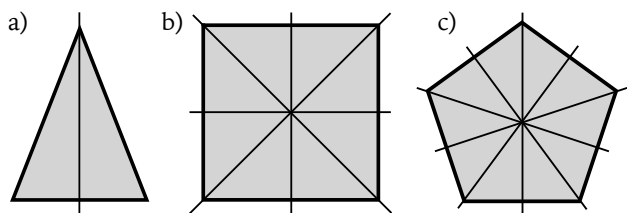
Rys. W.4. Kryształy:
a) monokryształ NaCl,
b) sieć krystaliczna NaCl,
c) domieszka w kryształe NaCl

- 4) Dla chemików i fizyków ciekawe są symetrie cząsteczek chemicznych.

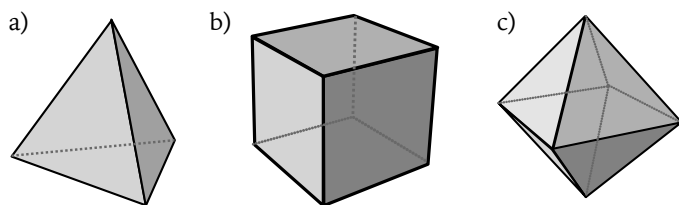


Rys. W.5. Cząsteczki chemiczne:
a) benzen C₆H₆,
b) metan CH₄,
c) jon kompleksowy [FeF₆]³⁻

- 5) W matematyce problemy symetrii pojawiają się co najmniej w dwóch działach:
a) geometrii – planimetrii i stereometrii (zalgabrazowany opis tych zagadnień jest częścią geometrii analitycznej),
b) teorii grup.



Rys. W.6. Figury płaskie:
a) trójkąt równoramienny,
b) kwadrat,
c) pięciokąt foremny

**Rys. W.7.** Bryły:

- a) czworościan,
- b) sześcian,
- c) ośmiościan

Tytuł tej książki jest trochę „na wyrost”. Zgodnie z nim interesować nas będzie przede wszystkim symetria w fizyce materii. Jest to jednak problematyka niezmiernie rozległa. Tutaj zajmiemy się przede wszystkim geometrycznymi symetriami tworów skończonych, takich jak cząsteczki chemiczne. Omawiać będziemy niemal wyłącznie:

- symetrie punktowe, czyli zachowujące co najmniej jeden punkt rozważanego obiektu;
- układy, które mają skończoną liczbę przekształceń symetrii.

Książka ta nie jest podręcznikiem i nie jest jej celem systematyczne przedstawienie materiału. Autor chciałby jedynie, aby Czytelnik poznał pewien sposób patrzenia na rzeczywistość fizyczną, powszechnie stosowany w fizyce materii.

Rysunki w tej książce są czarno-białe. Autor bardzo zachęca Czytelnika, aby czytając tekst drukowany zaglądał do kolorowych komputerowych prezentacji, zamieszczonych na stronie www.wuw.pl/product-pol-5998. Na tej samej stronie można obejrzeć także animacje drgań membran.

CZĘŚĆ I

W świecie geometrii elementarnej

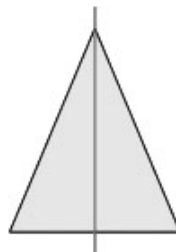
1. Izometrie w dwóch wymiarach

1.1. Wstęp

Kiedy w języku potocznym mówimy, że jakiś obiekt jest symetryczny, myślimy zwykle o symetrii¹ **odbicia** zwierciadlanego. Taką symetrię ma wiele kwiatów, na przykład fiołek, o czym wspominaliśmy już we wstępie (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Fiołek ma symetrię zwierciadlaną względem płaszczyzny pionowej



Rys. 1.2. Trójkąt równoramienny ma symetrię zwierciadlaną względem linii pionowej

W przypadku dzieł architektury czy kwiatów symetria ta nie jest idealna. Jeżeli przyjrzeć się portalowi katedry, zobaczymy, że figury świętych po prawej stronie nie są idealnym odbiciem posągów ze strony lewej (rys. 1.3). Podobne różnice występują w przypadku realnego kwiatu czy ludzkiej twarzy. My takie różnice będziemy zaniedbywać i myśleć o symetriach idealnych, takich jak symetrie figur matematycznych. Symetrię odbiciową ma na przykład trójkąt równoramienny (rys. 1.2).



Rys. 1.3. Symetria portalu katedry nie jest idealna

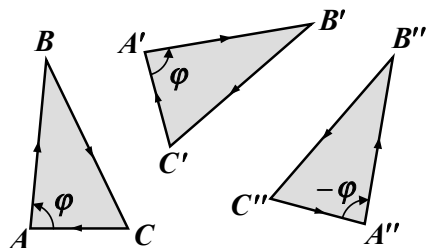
¹ *Symetria* po grecku oznacza dosłownie współmierność; *sym* – współ, *metron* – miara.

1.2. Izometrie w dwóch wymiarach w geometrii elementarnej

Definicja izometrii

W geometrii elementarnej omawia się przekształcenia figur płaskich zwane **izometriami**² (patrz np. [5]). Z definicji są to przekształcenia, które zachowują odległości pomiędzy punktami figury. Na przykład po przekształceniu trójkąta uzyskujemy trójkąt przystający (rys. 1.4). Przekształcenia tego typu mogą być dwóch rodzajów:

- 1) Zachowują orientację płaszczyzny, jak przekształcenie trójkąta ABC w trójkąt $A'B'C'$. W obu tych trójkątach obiegi wskazane przez strzałki są zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.
- 2) Zmieniają orientację płaszczyzny, jak przekształcenie trójkąta ABC w trójkąt $A''B''C''$. W tym ostatnim trójkącie strzałki wskazują obieg przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara.



Rys. 1.4. Dwa rodzaje izometrii

Ponieważ izometrie przekształcają figury w figury do nich przystające, w przypadku wielokątów zachowują nie tylko długości boków, ale i wartości bezwzględne kątów pomiędzy nimi.

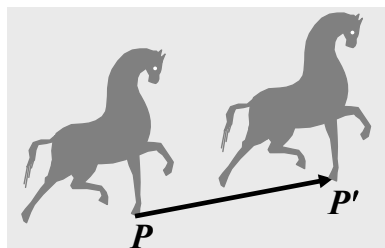
- 1) Jeżeli orientacja przestrzeni jest zachowana, kąty pozostają niezmienione.
- 2) Jeżeli orientacja przestrzeni zostaje odwrócona, kąty zmieniają znaki.

Podstawowe typy izometrii

W dwóch wymiarach wyróżniamy trzy podstawowe rodzaje izometrii:

- 1) **przesunięcia**³,
- 2) **obroty**,
- 3) **odbicia zwierciadlane**⁴,
- 4) wspomniemy także o **inwersji** względem punktu.

Przypomnijmy je krótko po kolei.



Rys. 1.5. Przesunięcie

² Nazwa pochodzi z greki: *izos* – równy, *metron* – miara.

³ Przesunięcie nazywamy też **translacją**; łacińskie *translatio* – przeniesienie.

⁴ Symetrię odbiciową w dwóch wymiarach nazywa się także symetrią **osiową**.

Przesunięcie

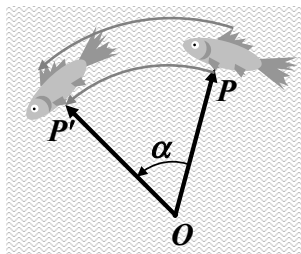
Przesunięcie polega na tym, że każdy punkt przekształconej figury został przemieszczony w tym samym kierunku, z tym samym zwrotem i o tę samą odległość. Przedstawia to rysunek 1.5. Obrazem punktu P jest punkt P' , przesunięty o odcinek wskazany strzałką.

W tej książce przesunięciami praktycznie nie będziemy się zajmować. Będziemy się ograniczać niemal wyłącznie do izometrii zachowujących **co najmniej jeden ustalony punkt w przestrzeni**, czyli do **izometrii punktowych**. Jeżeli w dalszym ciągu książki będziemy używać nazwy „izometria” bez dodatkowego objaśnienia, będziemy myśleć o przekształceniach tego rodzaju.

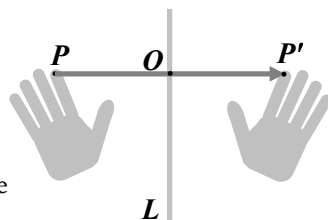
Obrót

Obrotem względem punktu O o kąt α nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.6)

- P' leży na prostej OP' , która z prostą OP tworzy kąt α . Przyjmuje się konwencję, że kąt α jest dodatni, jeżeli obrót zachodzi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
- długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP .



Rys. 1.6. Obrót



Rys. 1.7. Odbicie zwierciadlane

W tej książce na oznaczenie obrotu o kąt α używać będziemy symbolu $C(\alpha)$. Jeżeli następuje obrót o kąt $\frac{2\pi}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, używać będziemy oznaczenia C_n .

Zauważmy, że dowolny obrót w płaszczyźnie możemy interpretować jako obrót względem osi do tej płaszczyzny prostopadłej. Inna jest sytuacja w przypadku obrotów w przestrzeni, które mogą być dokonywane względem osi zorientowanych dowolnie. Powrócimy do tej sprawy w podrozdziale 4.1.

Odbicie zwierciadlane

Odbiciem zwierciadlanym figury względem linii L nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.7):

- P' leży na prostej przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do linii L . Prosta ta przecina prostą L w punkcie O .
- Długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP .

Odbicie zwierciadlane będziemy oznaczać symbolem σ .

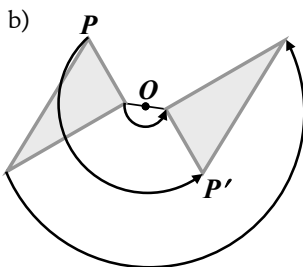
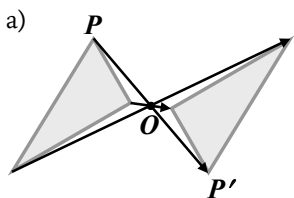
Odbicia mogą być dokonywane względem dowolnie zorientowanej linii L . Aby to doprecyzować, będziemy podawać wektor prostopadły do tej linii: $\vec{s}$. Będziemy więc używać w zasadzie oznaczenia $\sigma(\vec{s})$. Notacja taka jest jednak dość uciążliwa. Jeżeli będziemy mieli do czynienia na raz tylko z kilku różnymi odbiciami, będziemy je po prostu numerować, pisząc: $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ (patrz np. podrozdział 2.1).

Inwersja

Inwersją⁵ figury względem punktu O nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.8a):

- P' leży na prostej przechodzącej przez punkt P i punkt O .
- długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP .

Inwersję będziemy oznaczać symbolem i .



Rys. 1.8. a) Inwersja.
b) Inwersja w dwóch wymiarach jest równoważna obrotowi o 180°

Z rysunku 1.8b widać, że w dwóch wymiarach inwersja jest tożsamościowo równa obrotowi o kąt 180° , czyli o π . Inaczej jest w trzech wymiarach. Wróćmy do tej sprawy w podrozdziale 4.1.

Tożsamość

„Do kompletu” wprowadza się jeszcze pojęcie **tożsamości**, która odpowiada przekształceniu figury w samą siebie. Tożsamość będziemy oznaczać symbolem e .

1.3. Składanie izometrii

Złożenie dwóch izometrii jest też izometrią, bo każda z operacji składowych zachowuje odległości pomiędzy punktami figury. Przypuśćmy, że najpierw dokonaliśmy izometrii a , a potem izometrii b . Złożenie tych dwóch przekształceń symetrii daje w wyniku izometrię c . Zapisujemy to:

$$c = ba. \quad (1.1)$$

⁵ Nazwa pochodzi z łaciny: *inversio* – odwrócenie. Przekształcenie to nazywa się także symetrią środkową. W geometrii wprowadza się poza tym inwersję względem okręgu (patrz np. [20]). Tego typu przekształcenie nie jest izometrią, nie będziemy się nim zajmować.

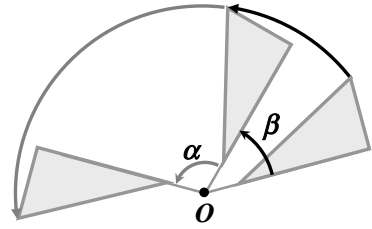
Zgodnie z przyjętą ogólnie konwencją pierwsza operacja zapisana jest po prawej, a druga po lewej. Wygoda takiego zapisu wyjaśni się w dalszym ciągu książki.

Można oczywiście podobnie składać więcej niż dwie izometrie, co wielokrotnie będziemy robić w dalszym ciągu książki.

Jeżeli składamy ze sobą kilka identycznych izometrii, używamy symboli analogicznych do zwykłego potęgowania:

$$aa = a^2, \quad (1.2)$$

$$aaa = a^3 \text{ itp.} \quad (1.3)$$



Rys. 1.9. Złożenie dwóch obrotów

Złożenie kilku obrotów

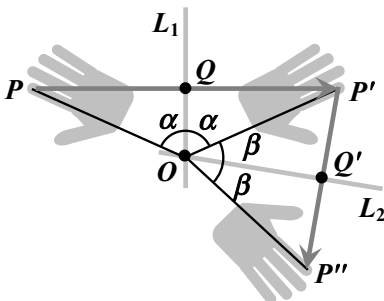
- 1) Złożenie dwóch obrotów względem punktu, odpowiednio o kąty α i β , jest także obrotem: o kąt równy sumie kątów, czyli o $\alpha + \beta$. Przedstawia to rysunek 1.9.
- 2) Złożenie obrotów o kąty α i $\beta = -\alpha$ jest operacją tożsamościową e .
- 3) n -krotnie powtórzony obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego daje kąt pełny, czyli transformację **tożsamościową**. Zatem

$$(C_n)^n = e. \quad (1.4)$$

Złożenie dwóch odbić zwierciadlanych

Rozpatrzmy złożenie dwóch odbić zwierciadlanych: σ_1 względem linii L_1 i σ_2 względem linii L_2 . Linie L_1 i L_2 tworzą ze sobą kąt γ . Złożenie to jest obrotem o kąt 2γ .

Przedstawia to rysunek 1.10. Na rysunku tym kąt pomiędzy liniami odbić jest równy $\gamma = \alpha + \beta$. Trójkąty PQO i $P'QO$ są przystające. Przystające są także trójkąty $P'Q'O$ i $P''Q'O$. Z rysunku widać, że punkt P został obrócony względem punktu O o kąt $2\alpha + 2\beta = 2\gamma$. Zatem



Rys. 1.10. Złożenie dwóch odbić

$$\sigma_2\sigma_1 = C(2\gamma). \quad (1.5)$$

Dwukrotne powtórzenie tego samego odbicia daje operację tożsamościową e , czyli

$$\sigma\sigma = \sigma^2 = e. \quad (1.6)$$

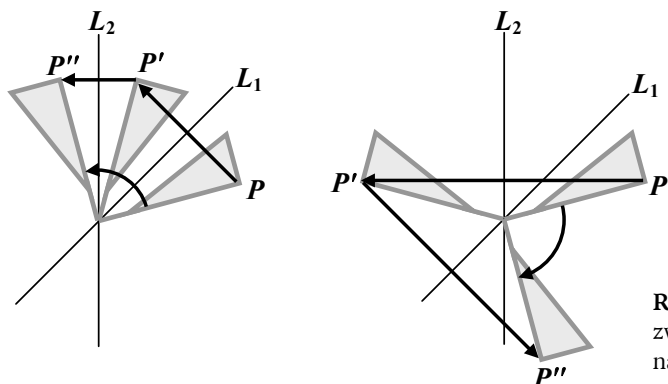
Wynika to też ze wzoru (1.5): Jeżeli kąt γ pomiędzy liniami L_1 i L_2 jest równy zeru, to i $2\gamma = 0$, a obrót o kąt zerowy jest tożsamością.

Złożenie izometrii nie zawsze jest przemienne

Operacja złożenia izometrii na ogół nie jest przemienne, czyli może zachodzić

$$ba \neq ab. \quad (1.7)$$

Nie jest na ogół przemienne składanie dwóch odbić zwierciadlanych (rys. 1.11). Na rysunku tym kąt między liniami L_1 i L_2 jest równy γ (por. rys. 1.10).



Rys. 1.11. Składanie odbić zwierciadlanych nie jest na ogół przemienne

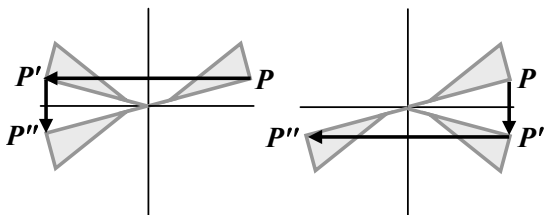
- a) wykonanie najpierw odbicia względem linii L_1 , a potem względem linii L_2 daje obrót o kąt $+2\gamma$

$$\sigma_2 \sigma_1 = C(2\gamma), \quad (1.8)$$

- b) wykonanie najpierw odbicia względem linii L_2 , a potem względem linii L_1 daje obrót o kąt -2γ

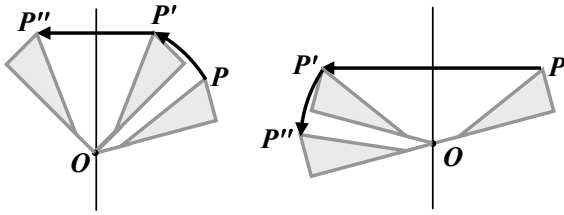
$$\sigma_1 \sigma_2 = C(-2\gamma). \quad (1.9)$$

Przemienne jest natomiast złożenie odbić względem dwóch linii prostopadłych, czyli dla kąta $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Wtedy $2\gamma = \pi$, a obrót o $+\pi$ jest równoważny obrotowi o $-\pi$ (rys. 1.12).



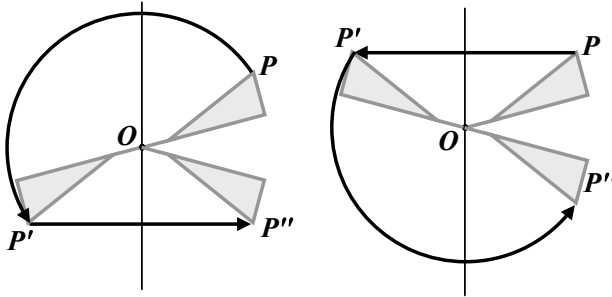
Rys. 1.12. Składanie odbić względem linii prostopadłych jest przemienne

Złożenie obrotu o kąt α i odbicia zwierciadlanego także zależy od kolejności wykonania tych operacji (rys. 1.13).



Rys. 1.13. Złożenie obrotu i odbicia zwierciadlanego nie jest na ogół przemienne

Przemienne jest natomiast złożenie odbicia i obrotu o kąt π (rys. 1.14).



Rys. 1.14. Złożenie obrotu o kąt π i odbicia zwierciadlanego jest przemienne

Omówione cechy przemienności składania izometrii będą miały istotne znaczenie na przykład przy omawianiu symetrii prostokąta czy rombu (podrozdział 2.8).

Izometrie odwrotne

Do każdej izometrii a można dobrać izometrię b , która złożona z izometrią a daje tożsamość. Taką izometrię nazywamy **izometrią odwrotną** do a i oznaczamy symbolem a^{-1} . Zapisujemy to:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e. \quad (1.10)$$

- 1) Izometrią odwrotną do obrotu o kąt α jest obrót o kąt $-\alpha$:

$$C(\alpha)^{-1} = C(-\alpha). \quad (1.11)$$

- 2) Obrót o kąt π jest równoważny obrotowi o kąt $-\pi$. Zatem izometrią odwrotną do obrotu o kąt π , czyli $C_2 = i$ jest też obrót o kąt π , czyli $C_2 = i$:

$$C_2^2 = e, \quad (1.12)$$

$$i^2 = e. \quad (1.13)$$

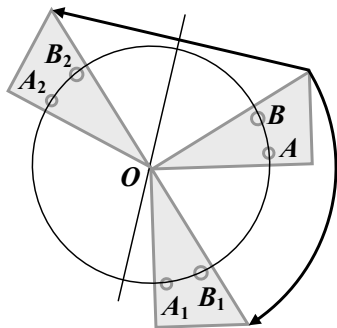
- 3) Izometrią odwrotną do odbicia σ jest to samo odbicie σ , bo $\sigma\sigma = e$.

1.4. Wynik złożenia izometrii w dwóch wymiarach

Zarówno obroty wokół określonego punktu O , jak i odbicia względem linii przechodzących przez ten punkt zachowują odległości punktów od punktu O . Zatem przekształcają okrąg o środku w O w samego siebie. Można więc wybrać dwa punkty przekształcanej figury A i B , które znajdują się na okręgu tego rodzaju. Po dokonaniu dowolnej liczby przekształceń uzyska się parę punktów figury przekształconej, które są obrazami punktów A i B . Punkty te leżą na tym samym okręgu, co punkty A i B . Są przy tym tylko dwie możliwości (rys. 1.15):

- 1) Orientacja nowych punktów A_1, B_1 jest względem okręgu identyczna jak punktów A i B . Wtedy parę punktów A, B można przekształcić w A_1, B_1 **jednym obrotem**.
- 2) Orientacja nowych punktów A_2, B_2 jest względem okręgu przeciwna niż punktów A i B . Wtedy parę punktów A, B można przekształcić w A_2, B_2 **jednym odbiciem**.

Zatem wynik dowolnej liczby punktowych operacji symetrii w dwóch wymiarach da się przedstawić jako jedna operacja tego rodzaju.



Rys. 1.15. Wynik przekształceń symetrii.
Szczegóły w tekście

1.5. Izometrie sprzężone

Wprowadzenie

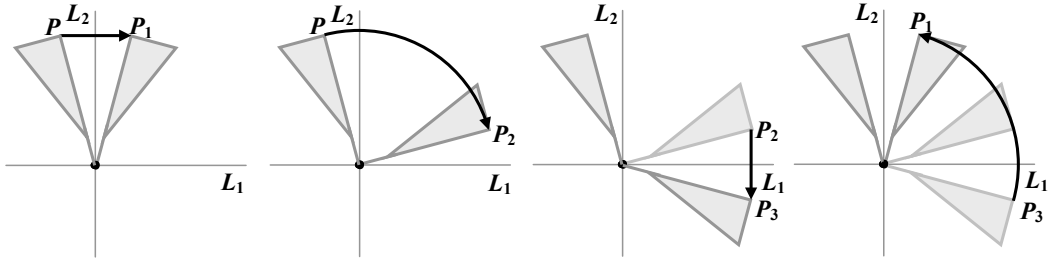
Niektóre z rozważanych przez nas operacji symetrii są do siebie „podobne”. Czujemy, że na przykład:

- odbicie zwierciadlane względem linii L_2 jest „podobne” do odbicia względem linii L_1 ,
- obrót o kąt 90° jest „podobny” do obrotu o -90° itp.

Spróbujmy sformułować to bardziej precyzyjnie.

PRZYKŁAD 1

Jeżeli chcemy w dwóch wymiarach dokonać odbicia jakiejś figury względem linii L_2 (pozioma strzałka), możemy to zrobić w sposób bardziej skomplikowany (rys. 1.16):

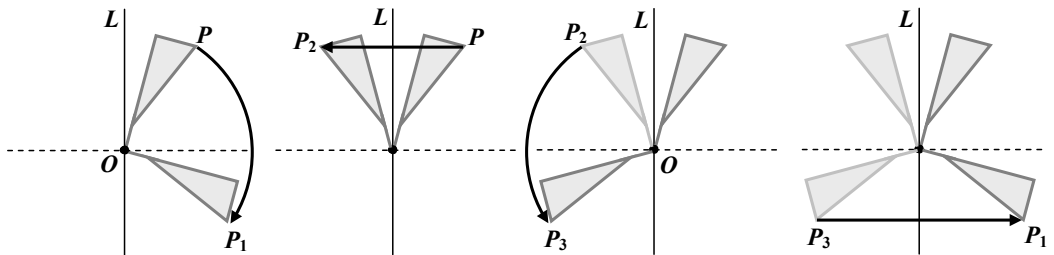


Rys. 1.16. Odbicie względem osi 2 jako złożenie trzech operacji

- 1) Najpierw obrócić figurę o kąt -90° , czyli dokonać transformacji C_4^3 , która jest transformacją odwrotną względem C_4 (łuk w prawo).
- 2) Następnie odbić figurę względem linii L_1 (pionowa strzałka).
- 3) Na końcu obrócić uzyskaną figurę o kąt $+90^\circ$, czyli dokonać transformacji C_4 (łuk w lewo).

PRZYKŁAD 2

Podobnie obrócić figurę o -90° możemy następująco (rys. 1.17):



Rys. 1.17. Obrót o -90° jako złożenie trzech operacji

- 1) Odbić ją względem osi L (pozioma strzałka w lewo).
- 2) Obrócić o kąt $+90^\circ$ (łuk).
- 3) Ponownie odbić względem osi L (pozioma strzałka w prawo).

Izometrie sprzężone

Jeżeli izometria c da się przedstawić przez izometrie a i b w postaci

$$c = bab^{-1}, \quad (1.14)$$

mówimy, że izometrie c i a są **sprzężone**.

Zgodnie z tą definicją sprzężone są ze sobą na przykład:

- odbicie względem osi L_1 i odbicie względem osi L_2 z przykładu 1,
- obrót o $+90^\circ$ i -90° z przykładu 2.

Uogólniając rozważania z przykładów 1 i 2, można wykazać, że:

- 1) Wszystkie odbicia zwierciadlane sprzężone są ze sobą.
- 2) Sprzężone są obroty o kąty α i $-\alpha$.

Izometria jest sprzężona sama ze sobą

Zgodnie z podaną definicją każda izometria jest sprzężona sama ze sobą.

- 1) Przykład trywialny. Jeżeli wybrać we wzorze $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, wtedy $\mathbf{c} = \mathbf{bab}^{-1} = \mathbf{aaa}^{-1} = \mathbf{a(aa}^{-1}) = \mathbf{a}$.
- 2) Przykład mądrzejszy. Rozpatrzmy wybór: $\mathbf{a}$ jest obrotem w płaszczyźnie o kąt α , $\mathbf{b}$ jest obrotem o kąt β . Wtedy złożenie (1.14) odpowiada obrotowi o kąt $\varphi = -\beta + \alpha + \beta = \alpha$.

Do problemu operacji sprzężonych będziemy powracać w przyszłości wielokrotnie. Na przykład będziemy omawiać klasy elementów sprzężonych, kiedy zajmiemy się bardziej szczegółowo grupami symetrii (np. podrozdział 2.11).

1.6. Przekształcanie wektora

Do tej pory omawialiśmy problem izometrii zupełnie ogólnie. Teraz zastosujemy te rozważania do transformacji wektorów. Rozpatrzmy pewien wektor $\vec{x}$ o początku w punkcie O . Punkt ten zachowują rozważane izometrie. Pod wpływem izometrii $\mathbf{a}$ wektor $\vec{x}$ przejdzie w inny wektor $\vec{y}$.

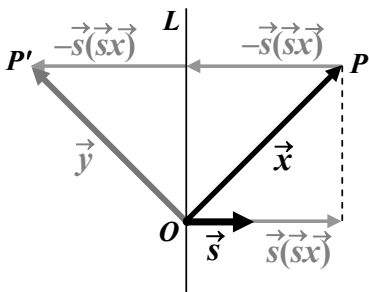
Napiszemy to formalnie:

$$\vec{y} = \hat{\mathbf{a}}\vec{x}. \quad (1.15)$$

Symbolem $\hat{\mathbf{a}}$ oznaczyliśmy **operator** przekształcający pierwszy z wektorów w drugi. Ponieważ operacja przekształcania jest izometrią, wartość wektora $\vec{y}$ jest taka sama jak wartość wektora $\vec{x}$. Natomiast kierunek i zwrot są na ogół inne.

Transformacja wektora przy odbiciu

Rozpatrzmy teraz wektor $\vec{y}$, który stanowi odbicie wektora $\vec{x}$ względem linii L (rys. 1.18).



Rys. 1.18. Odbicie wektora względem linii L

Wersor $\vec{s}$ jest do tej linii prostopadły. Z rysunku widać, że

$$\vec{y} = \vec{x} - 2(\vec{s}\vec{x})\vec{s}. \quad (1.16)$$

Możemy zauważyć, że $(\vec{s}\vec{x})\vec{s}$ jest składową wektora $\vec{x}$ prostopadłą do linii L . Oznaczmy ją symbolem $\vec{x}_\perp$. Wzór (1.16) można wtedy zapisać w równoważnej postaci

$$\vec{y} = \vec{x} - 2\vec{x}_\perp. \quad (1.17)$$

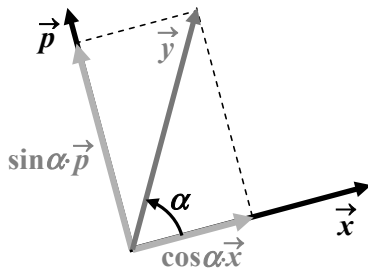
Z definicji wersor $\vec{s}$ jest prostopadły do linii L , od której następuje odbicie. Są jednak dwie możliwości wyboru takiego wersora:

- 1) Pierwsza jak na rysunku 1.18. Wersor $\vec{s}$ jest zwrócony w prawo.
- 2) Druga z wersorem $\vec{s}' = -\vec{s}$, czyli zwróconym w lewo.

Wybór zwrotu wersora nie wpływa jednak na wektor $\vec{y}$, określony wzorem (1.16). W znajdującym się w nim iloczynie wersor $\vec{s}$ występuje dwukrotnie.

Transformacja wektora przy obrocie

Rozpatrzmy teraz obrót o kąt α (rys. 1.19). Pod wpływem takiego obrotu wektor $\vec{x}$ przechodzi w wektor $\vec{y}$.



Rys. 1.19. Obrót wektora o kąt α .
Szczegóły w tekście

Wprowadźmy jeszcze pomocniczy wektor $\vec{p}$, który

- ma taką samą długość jak wektor $\vec{x}$,
- jest do wektora $\vec{x}$ prostopadły i ma taki zwrot, że kąt obrotu od $\vec{x}$ do $\vec{p}$ jest dodatni.

Z rysunku widać, że zachodzi związek

$$\vec{y} = \cos \alpha \cdot \vec{x} + \sin \alpha \cdot \vec{p}. \quad (1.18)$$

Dygresja

W zasadzie prowadzimy na razie rozważania w dwóch wymiarach. Dopuszczmy jednak na moment wymiar trzeci i wprowadźmy wersor $\vec{r}$ prostopadły do rozważanej płaszczyzny i zwrócony przed kartkę. Wtedy wektor $\vec{p}$ moglibyśmy zapisać w postaci iloczynu wektorowego

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{x}. \quad (1.19)$$

Wróćmy do tego zapisu w podrozdziale 4.7.

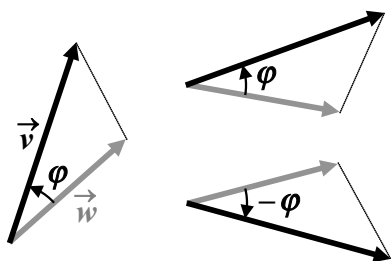
1.7. Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ nazywamy skalar określony wzorem

$$\vec{w}\vec{v} = wv \cos \varphi, \quad (1.20)$$

gdzie w i v oznaczają odpowiednio wartości wektorów, a φ kąt pomiędzy nimi. Pamiętajmy, że cosinus jest funkcją parzystą: $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$.

Ponieważ izometrie zachowują długości odcinków i wartości bezwzględne kątów, zachowują także wynik iloczynu skalarnego (rys. 1.20).



Rys. 1.20. Iloczyn skalarny pary wektorów przekształconych przez izometrię jest taki sam, jak iloczyn skalarny wektorów wyjściowych

Możemy to zapisać w formie (patrz też wzór (1.15)):

$$(\hat{a}\vec{w})(\hat{a}\vec{v}) = \vec{w}\vec{v}. \quad (1.21)$$

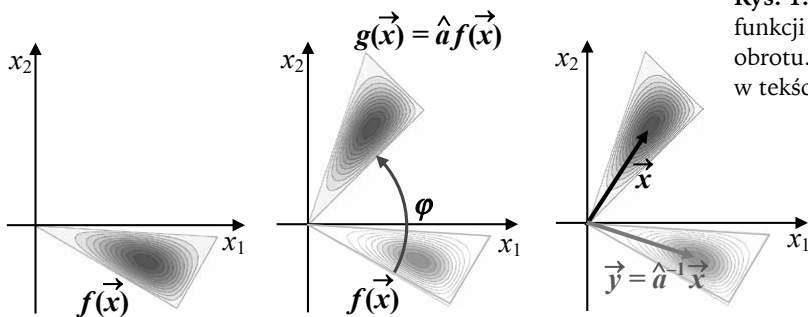
1.8. Przekształcanie funkcji

Na zakończenie tego rozdziału rozpatrzmy jeszcze pewną funkcję dwóch zmiennych

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) \quad (1.22)$$

określoną na rozważanej płaszczyźnie. Pod wpływem operacji $\hat{a}$ funkcja ta przejdzie w na ogół nową funkcję (rys. 1.21)

$$g(\vec{x}) = \hat{a}f(\vec{x}). \quad (1.23)$$



Rys. 1.21. Przekształcanie funkcji pod wpływem obrotu. Szczegóły w tekście

Podobnie jak w podrozdziale 1.6 symbolem $\hat{a}$ oznaczyliśmy **operator**, działający teraz na funkcję $f(\vec{x})$. Rysunek 1.21 przedstawia to dla obrotu. Nowa funkcja $g(\vec{x})$ jest funkcją $f(\vec{x})$ obróconą o kąt α , na rysunku równy 75° .

Zauważmy na tym rysunku, że nowa funkcja $g(\vec{x})$ w punkcie $\vec{x}$ ma taką wartość, jaką miała stara funkcja $f(\vec{x})$ w punkcie $\vec{y}$, gdzie wektor $\vec{y}$ jest wektorem $\vec{x}$ obróconym o kąt $-\alpha$ (na rysunku 1.21 o kąt -75°).

$$\vec{y} = \hat{a}^{-1} \vec{x}. \quad (1.24)$$

Ogólnie możemy to zapisać w formie:

$$g(\vec{x}) = \hat{a} f(\vec{x}) = f(\hat{a}^{-1} \vec{x}). \quad (1.25)$$

W rozdziale 4 uogólnimy nasze dotychczasowe rozważania na przypadek trzech wymiarów.

PRZYKŁAD

Zastosujmy te ogólne wzory do szczególnego przypadku, kiedy funkcja $f(\vec{x})$ ma postać

$$f(\vec{x}) = \vec{n} \vec{x} F(x), \quad (1.26)$$

gdzie $\vec{n}$ jest wersorem, a $F(x)$ funkcją jedynie wartości wektora $\vec{x}$. Oznacza to, że $F(x)$ przechodzi w siebie pod wpływem dowolnej izometrii $\hat{a}$.

Jako przykład funkcji o postaci (1.26) mogą służyć (ograniczone do dwóch wymiarów):

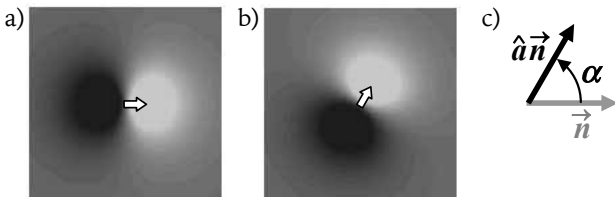
1) Funkcja opisująca potencjał dipola

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{x}}{x^3} = \vec{n} \vec{x} \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 x^3}, \quad (1.27)$$

gdzie $\vec{p}_e = \vec{n} p_e$ jest momentem dipolowym.

2) Funkcja falowa stanu 2p atomu wodoru (bez czasu, rys. 1.22):

$$\psi_{2p}(\vec{x}) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_B^3} \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{a_B} e^{-\frac{x}{2a_B}} = \vec{n} \vec{x} \frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_B^5} e^{-\frac{x}{2a_B}}. \quad (1.28)$$



Rys. 1.22. Obrót funkcji elektronowej p atomu wodoru

Z rysunku 1.22 widać, że obrócenie takiej funkcji sprowadza się do obrócenia wersora $\vec{n}$ o kąt α . Wykażmy to jednak „naukowo”, korzystając ze wzoru (1.15).

1) Dla funkcji o postaci (1.26) i izometrii $\mathbf{a}$ mamy

$$g(\vec{x}) = \hat{\mathbf{a}}f(\vec{x}) = f(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = \vec{n}(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x})F(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = \vec{n}(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x})F(x). \quad (1.29)$$

Skorzystaliśmy z tego, że funkcja $F(x)$ przechodzi w siebie pod wpływem dowolnej izometrii $\mathbf{a}$, czyli $F(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = F(x)$.

2) Stwierdziliśmy w poprzednim podrozdziale, że dla dowolnych wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ i dowolnej izometrii $\mathbf{a}$ zachowany jest iloczyn skalarny, czyli zachodzi $\vec{w}\vec{v} = (\hat{\mathbf{a}}\vec{w})(\hat{\mathbf{a}}\vec{v})$. Zastosujmy tę równość do iloczynu skalarnego $\vec{n}(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x})$, kładąc $\vec{w} = \vec{n}$ i $\vec{v} = \hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}$:

$$\vec{n}(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\mathbf{a}}\vec{n})(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\mathbf{a}}\vec{n})\vec{x}. \quad (1.30)$$

Stąd

$$g(\vec{x}) = \hat{\mathbf{a}}f(\vec{x}) = f(\hat{\mathbf{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\mathbf{a}}\vec{n})\vec{x}F(x). \quad (1.31)$$

Jak oczekiwaliśmy – przekształcenie funkcji (1.26) sprowadza się do przekształcenia wersora $\vec{n}$.

2. Przekształcenia symetrii w dwóch wymiarach

2.1. Symetrie figur płaskich

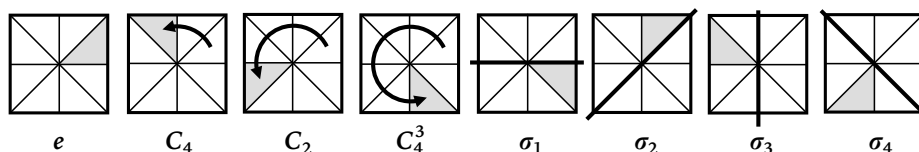
Weźmy teraz pod uwagę pewną figurę geometryczną i rozważmy takie izometrie, które przekształcają tę figurę w siebie. Izometrię tego rodzaju będziemy nazywać **przekształceniem symetrii** lub krócej **symetrią** figury geometrycznej – w dwóch wymiarach. Tej samej nazwy będziemy używać dla izometrii przekształcających bryłę w siebie – w trzech wymiarach.

Nazewnictwo

Używane nazewnictwo nie jest jednoznaczne:

- Zgodnie z przyjętą wyżej definicją symetrią nazywamy izometrię, przekształcającą figurę lub bryłę w siebie. Na przykład kwadrat ma symetrię odbicia względnej przekątnej σ_2 (rys. 2.1).
- Symetrią figury lub bryły nazywa się także zbiór wszystkich izometrii przekształcających figurę lub bryłę w siebie. W przypadku kwadratu jest to zbiór ośmiu izometrii (także rys. 2.1).

Zwykle z kontekstu bez trudu można się zorientować, o które z tych znaczeń chodzi.



Rys. 2.1. Operacje symetrii kwadratu

Symetrie figur skończonych

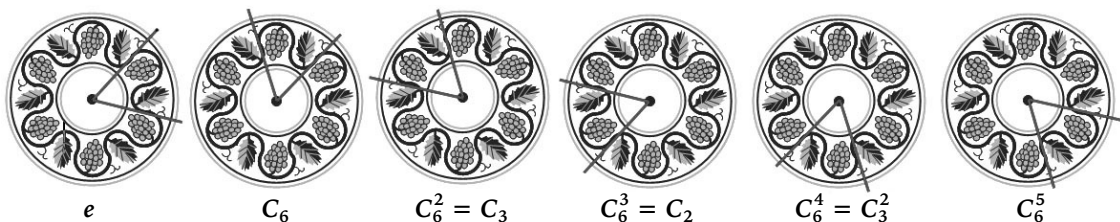
Figury o skończonych rozmiarach mają symetrie omówione w podrozdziale poprzednim, to znaczy **odbicia** i **obroty** (w tym **inwersję**).

Do ich symetrii nie mogą natomiast należeć przesunięcia. Symetrię przesunięcia mogą mieć tylko fikcyjne twory nieskończone, jak prosta czy wyidealizowana nieskończona sieć krystaliczna.

Obroty

Mogą istnieć dwa przypadki:

- 1) Figura ma symetrię obrotu o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego, czyli o $\frac{360^\circ}{n}$, a w mierze łukowej o $\frac{2\pi}{n}$, oraz o wielokrotności tego kąta. Symetrie takie ma ornament przedstawiony na rysunku 2.2. W tym przypadku $n = 6$. Mówiliśmy już w rozdziale poprzednim, że obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego będziemy oznaczać symbolem C_n , a wielokrotności takiego obrotu symbolami C_n^2 , C_n^3 itp. zgodnie z konwencją omówioną w rozdziale poprzednim. Dla określonej figury istnieje skończona liczba nietrywialnie różnych operacji tego rodzaju, bo n -krotnie powtórzony obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego daje kąt pełny, czyli transformację tożsamościową e (wzór (1.4)).
- 2) Koło i okrąg mają symetrie obrotu o kąty dowolne, symetrii takich jest nieskończenie wiele.



Rys. 2.2. Ornament o sześciokrotnej symetrii obrotowej

Symetria odbiciowa

Figura może mieć także symetrię odbiciową – tak jak trójkąt równoramienny z rysunku 1.2. Symetrie takie oznaczamy symbolem σ (oznaczenie to wprowadziliśmy w rozdziale poprzednim).

2.2. Symetria kwadratu

Omawianie symetrii figur skończonych zaczniemy od kwadratu. Na rysunku 2.1 kwadrat został podzielony na 8 części. Na pierwszym z ośmiu rysunków jedna z części została wybrana i zaznaczona szarym kolorem. Kolejne operacje symetrii przeprowadzają cały kwadrat w siebie, ale pod ich wpływem wybrana część zmienia położenie.

1) Trzy rysunki przedstawiają kolejno obroty:

- o 90° , czyli $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Zgodnie z umową oznaczamy ten obrót symbolem C_4 .
- o 180° , czyli $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Zgodnie z umową oznaczamy go symbolem C_2 .
- o 270° , czyli $3 \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$. Jest on równoważny obrotowi o kąt -90° , czyli $-\frac{\pi}{2}$. Zgodnie z konwencją z podrozdziału 1.3 oznaczyliśmy ten obrót symbolem C_4^3 .

2) Następne cztery rysunki ilustrują odbicia zwierciadlane:

- względem linii poziomej łączącej środki przeciwległych boków. Oznaczone ono zostało symbolem σ_1 ;
- względem jednej z przekątnych, oznaczone symbolem σ_2 ;
- względem linii pionowej oznaczone symbolem σ_3 ;
- względem drugiej z przekątnych oznaczone symbolem σ_4 .

Częstka wyjściowa i siedem nowych, uzyskanych za pomocą omówionych przekształceń symetrii, wypełniają cały kwadrat.

Inwersja w dwóch wymiarach

Wspomnieliśmy już w podrozdziale 1.2, że obrót o kąt równy 180° w dwóch wymiarach nazywa się także inwersją i (lub symetrią środkową). Powiedzieliśmy już, że kwadrat ma taką symetrię (rys. 2.1).

Równoległobok dowolny ma oprócz tożsamości tylko symetrię inwersji (patrz dalej, podrozdział 2.6).

Symetria tożsamościowa

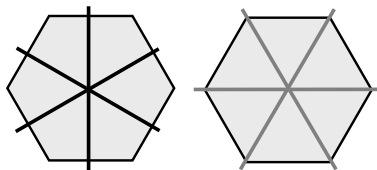
W rozdziale poprzednim wprowadziliśmy formalnie jeszcze jeden typ symetrii: **tożsamość**. Oznacza ona przekształcenie niezmienniczące nic w układzie. Tożsamość oznaczać będziemy symbolem e . Tak został podpisany pierwszy z ośmiu rysunków na ilustracji 2.1.

Symetrie odbiciowe wielokątów o parzystej liczbie boków

Zauważmy, że kwadrat ma dwa istotnie różne rodzaje odbić zwierciadlanych, względem prostych:

- a) przechodzących przez środki przeciwległych boków (σ_1 i σ_3),
- b) przechodzących przez przeciwległe wierzchołki (σ_2 i σ_4).

Taką właściwość mają też inne wielokąty foremne o **parzystej** liczbie boków. Rysunek 2.3 przedstawia linie odbić zwierciadlanych sześciokąta. Linie symetrii typu a) zostały zaznaczone kolorem czarnym, a typu b) – kolorem szarym.



Rys. 2.3. Linie odbić zwierciadlanych sześciokąta foremnego

Zbiór przekształceń, czyli grupa symetrii

Podsumujmy: kwadrat ma 8 przekształceń symetrii:

$$e, C_4, C_2 = C_4^2, C_4^3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4. \quad (2.1)$$

Zbiór wszystkich operacji symetrii określonego obiektu nazywamy **grupą symetrii** lub **grupą przekształceń**. Taką grupę stanowią na przykład wypisane przekształcenia symetrii kwadratu. Grupa symetrii kwadratu ma 8 elementów.

Dokładniejsza definicja pojęcia grupy podana jest dalej, w podrozdziale 2.5.

2.3. Składanie operacji symetrii

Złożenie przekształceń

Każde z omawianych wyżej przekształceń symetrii przeprowadzało rozważaną figurę geometryczną w siebie. Zastanówmy się, co będzie, jeżeli dokonamy po kolei dwóch przekształceń: najpierw przekształcenia **a**, a potem przekształcenia **b**. Na skutek obu tych operacji figura także przejdzie w siebie. A zatem **złożenie** dwóch przekształceń symetrii daje w wyniku także pewne przekształcenie symetrii **c**. Zapisujemy to w postaci

$$c = ba. \quad (2.2)$$

Oznaczenie jest identyczne, jak dla składania izometrii omówionego w podrozdziale 1.3.

Złożenie obrotów

Złożenie obrotu względem punktu o kąt α i obrotu o kąt β jest także obrotem: o kąt $\alpha + \beta$. Mówiliśmy już o tym w podrozdziale 1.3. Na przykład dwukrotne obrócenie kwadratu o 90° daje obrót o 180° (rys. 2.1):

$$C_4 C_4 = C_4^2 = C_2. \quad (2.3)$$

Podobnie trzykrotne złożenie obrotów o 90° daje obrót o 270° :

$$C_4 C_4 C_4 = C_4^3. \quad (2.4)$$

Czterokrotne złożenie takich obrotów, czyli C_4^4 , oznacza obrót o 360° , co jest równoważne tożsamości e . Zatem

$$C_4^4 = e. \quad (2.5)$$

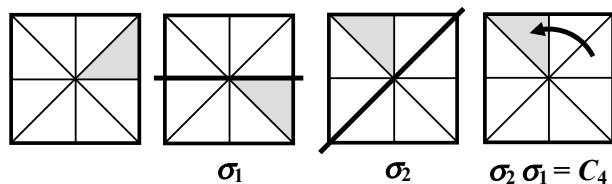
Złożenie dwóch identycznych odbić

Złożenie dwóch odbić względem tej samej linii daje przekształcenie tożsamościowe (mówiliśmy o tym w podrozdziale 1.3). Na przykład (rys. 2.1)

$$\sigma_1 \sigma_1 = e. \quad (2.6)$$

Złożenie dwóch różnych odbić

Złożenie dwóch odbić względem dwóch linii tworzących ze sobą kąt α jest obrotem o kąt równy 2α (podrozdział 1.3).



Rys. 2.4. Złożenie dwóch różnych odbić

Na przykład kąt pomiędzy liniami odbić σ_1 i σ_2 z rysunku 2.4 jest równy $\alpha = 45^\circ$. Przekształcenie, które jest złożeniem kolejno σ_1 i σ_2 , jest obrotem o kąt 90° (rys. 2.4):

$$\sigma_2 \sigma_1 = C_4. \quad (2.7)$$

Pamiętajmy: przekształcenia piszemy w odwrotnej kolejności!

Podobnie możemy napisać (proszę sprawdzić samodzielnie!)

$$\sigma_1 \sigma_2 = C_4^3. \quad (2.8)$$

Złożenie przekształceń symetrii nie zawsze jest przemienne

Operacja złożenia przekształceń symetrii na ogół nie jest przemienne, o czym mówiliśmy już w podrozdziale 1.3. Może więc zachodzić

$$ba \neq ab. \quad (2.9)$$

Na przykład $\sigma_2 \sigma_1 = C_4$, ale $\sigma_1 \sigma_2 = C_4^3$ (wzory (2.7) i (2.8)).

2.4. Tabela grupowa

Przy omawianiu właściwości symetrii figur geometrycznych sporządza się tabele, które przedstawiają złożenia poszczególnych operacji symetrii rozważanego obiektu – czyli poszczególnych elementów grupy symetrii. Nazywamy je **tabelami grupowymi** (nazwa stanie się zrozumiała w następnym podrozdziale). Oczywiście postępuje się tak wtedy, kiedy liczba przekształceń symetrii jest niezbyt wielką liczbą naturalną.

PRZYKŁAD

Tabela 2.1 przedstawia złożenia elementów symetrii kwadratu $c = ba$. Pierwszy wiersz przedstawia element a , który działa jako pierwszy. Pierwsza kolumna przedstawia element b , który działa jako drugi.

Składanie interesujących nas elementów grupy symetrii omówiliśmy już w zasadzie w podrozdziale poprzednim. Stwierdziliśmy wtedy na przykład, że

$$C_4 C_4 = C_4^2 = C_2. \quad (2.10)$$

$$C_4 C_4 C_4 = (C_4 C_4) C_4 = C_2 C_4 = C_4^3, \quad (2.11)$$

$$\sigma_1 \sigma_1 = e, \quad (2.12)$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = C_4, \quad (2.13)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = C_4^3. \quad (2.14)$$

Pozostałe rubryki wypełniamy w podobny sposób.

Tabela 2.1. Tabela złożenia operacji symetrii kwadratu $c = ba$
(tabela grupowa)

$b \backslash a$	e	C_4	C_2	C_4^3	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4
e	e	C_4	C_2	C_4^3	σ_1	σ_3	σ_2	σ_4
C_4	C_4	C_2	C_4^3	e	σ_2	σ_4	σ_3	σ_1
C_2	C_2	C_4^3	e	C_4	σ_3	σ_1	σ_4	σ_2
C_4^3	C_4^3	e	C_4	C_2	σ_4	σ_2	σ_1	σ_3
σ_1	σ_1	σ_4	σ_3	σ_2	e	C_2	C_4^3	C_4
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_4	C_2	e	C_4	C_4^3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3	C_4	C_4^3	e	C_2
σ_4	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	C_4^3	C_4	C_2	e

2.5. Grupa przekształceń

Zbiór wszystkich operacji symetrii określonego obiektu nazywamy **grupą symetrii** lub **grupą przekształceń**. Taką grupę stanowią na przykład omówione wyżej przekształcenia symetrii kwadratu. Wiemy już, że grupa symetrii kwadratu ma 8 elementów.

W matematyce pojęcie grupy jest precyzyjnie określone.

Definicja grupy

W matematyce **grupą** G nazywamy:

- zbiór różnych elementów $a, b, c, \dots$,
- dla którego określona jest operacja **złożenia** (którą oznaczmy tu symbolem $\bullet$), i który ma następujące własności:
 - 1) Jeżeli a i b są elementami zbioru G , to i ich złożenie $b \bullet a$ jest elementem zbioru G .
 - 2) Operacja złożenia jest łączna: $c \bullet b \bullet a = (c \bullet b) \bullet a = c \bullet (b \bullet a)$.
 - 3) Zbiór G zawiera **element jednostkowy** e , taki że $e \bullet a = a \bullet e = a$.
 - 4) Jeżeli a należy do zbioru G , to w zbiorze jest i element b o własności $b \bullet a = a \bullet b = e$. Element b nazywamy **elementem odwrotnym** do elementu a i zapisujemy go $b = a^{-1}$.

Nie wymaga się, aby operacja złożenia była **przemienne**.

Definicja grupy symetrii

Zbiór elementów symetrii figury – takiej jak kwadrat – stanowi grupę. Nazywamy ją **grupą symetrii**.

- 1) Postulat 1 wynika z ogólnej własności izometrii: złożenie izometrii jest izometrią (podrozdział 1.3).
- 2) Złożenie izometrii jest łączne (podrozdział 1.3).
- 3) Elementem jednostkowym jest przekształcenie tożsamościowe (podrozdziały 1.2 i 1.3).
- 4) Do każdej izometrii można dobrać izometrię odwrotną.

W szczególności:

 - a) operacją odwrotną do obrotu o kąt α względem pewnej osi jest obrót o kąt $-\alpha$ względem tej samej osi (podrozdział 1.3),
 - b) operacją odwrotną do odbicia względem określonej płaszczyzny jest odbicie względem tej samej płaszczyzny. Innymi słowy: odbicie jest swoją własną operacją odwrotną,
 - c) operacją odwrotną do inwersji jest ta sama inwersja.

Składanie izometrii na ogół nie jest przemienne (podrozdziały 1.3 i 2.3).