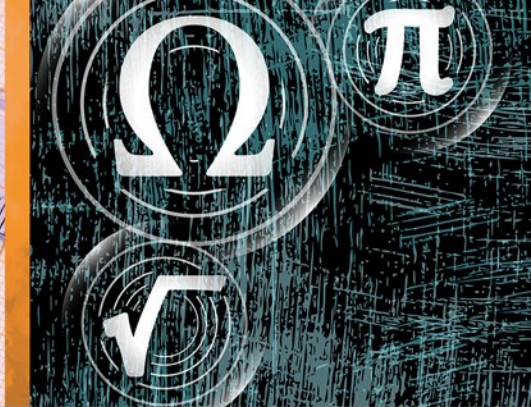
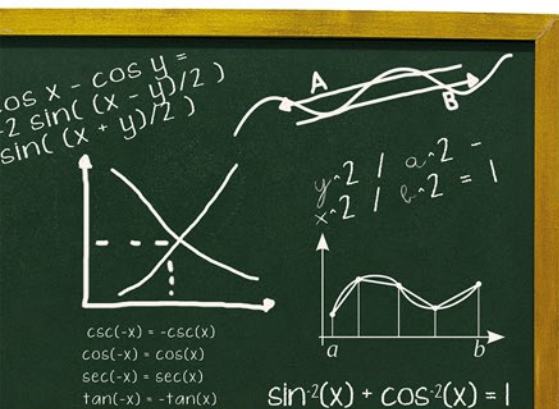




WZORY · DEFINICJE · ZADANIA

ATLAS MATEMATYKI



LICEUM I TECHNIKUM

Wzory, definicje i zadania,
które uporządkują wiedzę
przydatną na maturze
i skutecznie przygotowują
do egzaminu

Jarosław Jabłonka

ATLAS

MATEMATYKI

LICEUM I TECHNIKUM



Tekst i ilustracje: Jarosław Jabłonka

Korekta: zespół wydawnictwa SBM

Opracowanie graficzne i skład: Paweł Bednarek

Projekt okładki: Dirty South Design

Zdjęcia na okładce: Dreamstime.com: © Stephen Coburn, © Crystal Srock, © Kevinr4, © Candybox Images, © Garrifrotto, © Kittipong Jirasukhanont, © Richard Villalon; Freepik.com: © Hello_Pixel

© Copyright for the text, cover and layout by Wydawnictwo SBM Sp. z o.o., 2021

Warszawa 2021



Wydawnictwo SBM Sp. z o.o.

ul. Sułkowskiego 2/2

01-602 Warszawa

www.WYDAWNICTWO-SBM.pl

ISBN 978-83-8222-520-4

Spis treści

Wstęp	7
Liczby rzeczywiste	9
Zbiory	9
Wybrane zbiory liczbowe	9
Relacje między zbiorami	10
Działania na zbiorach	11
Przedziały liczbowe	11
Własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej	12
Przybliżenie liczby	12
Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia	13
Potęgi i pierwiastki	13
Potęga o wykładniku wymiernym	14
Ogólne prawa potęgowania	14
Pierwiastki	14
Logarytmy	15
Zastosowania logarytmów	16
Poziom natężenia dźwięków	16
Wartość pH roztworu	16
Wyrażenia algebraiczne i wielomiany	17
Wzory skróconego mnożenia	17
Wielomiany jednej zmiennej	18
Działania na wielomianach	18
Dzielenie wielomianów jednej zmiennej	19
Metody dzielenia wielomianów	20
Dzielenie pisemne wielomianów	20
Dzielenie przez dwumian $x - c$ za pomocą schematu Hornera	20
Twierdzenie Bezouta	21
Rozkład wielomianu na iloczyn wielomianów	22
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	22
Grupowanie wyrazów w taki sposób, by móc wyciągnąć	
wspólny czynnik przed nawias	23
Podzielenie wielomianu przez odpowiednie wielomiany liniowe,	
jeśli znane są miejsca zerowe wielomianu	23
Równania, układy równań i nierówności	25
Równania, układy równań i nierówności	25
Równania liniowe z wartością bezwzględną	26
Nierówności z wartością bezwzględną	27
Układy równań liniowych	30
Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą podstawiania	31

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą przeciwnych współczynników	32
Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą wyznacznikową	34
Równania kwadratowe	35
Nierówności kwadratowe	36
Układy równań, w których jedno równanie jest stopnia pierwszego, a drugie jest równaniem okręgu	38
Układy równań, w których jedno równanie jest stopnia pierwszego, a drugie jest równaniem paraboli	39
Proste równania wielomianowe	39
Proste równania wymierne	41
Nierówności	42
Obce pierwiastki równań	43
Funkcje	45
Ogólne własności funkcji	45
Monotoniczność funkcji	47
Parzystość i nieparzystość funkcji	48
Przekształcanie wykresów funkcji	49
Funkcja liniowa	51
Funkcja kwadratowa	53
Przedziały monotoniczności funkcji	54
Największa oraz najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym $[k, m]$	55
Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej	56
Proporcjonalność odwrotna	58
Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	59
Własności funkcji wykładniczej	60
Funkcja logarytmiczna	61
Własności funkcji logarytmicznej	61
Ciągi	63
Własności ciągu arytmetycznego	65
Własności ciągu geometrycznego	66
Procent składany	69
Trygonometria	71
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym	71
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°	72
Definicje funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego	74
Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych na podstawie znajomości ich wartości dla kątów ostrych	76
Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów	76
Twierdzenie sinusów	79
Twierdzenie cosinusów [Carnota]	80

Planimetria	83
Przekształcenia płaszczyzny	83
Własności relacji przystawania	85
Własności figur przystających	85
Cechy przystawania trójkątów	85
Własności podobieństwa	88
Cechy podobieństwa trójkątów	88
Twierdzenie Talesa i jego kontrapozycja	90
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa	93
Geometria trójkąta	95
Wysokości trójkąta	95
Wzory na pole trójkąta	96
Środkowe trójkąta	97
Dwusieczne w trójkącie	98
Twierdzenie o dwusiecznej	99
Symetralne boków	100
Własności trójkątów prostokątnych	100
Konstrukcja trójkąta prostokątnego za pomocą cyrkla i linijki	102
Trójkąty szczególne	103
Trójkąt równoboczny	103
Trójkąt prostokątny o kątach 30° – 90° – 60°	104
Trójkąt prostokątny równoramienny	105
Właściwości wybranych czworokątów	105
Okrąg	107
Odcinki w okręgu, odcinek koła i wycinek koła	107
Kąty związane z okręgiem	107
Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	111
Prosta w układzie współrzędnych	111
Położenie dwóch prostych (na płaszczyźnie) względem siebie	112
Odległość punktu od prostej	115
Odległość między dwiema prostymi równoległymi	116
Równanie okręgu	117
Wzajemne położenie okręgu i prostej	118
Symetrie w układzie współrzędnych	119
Stereometria	121
Nazewnictwo graniastosłupów i ostrosłupów	121
Położenie prostych w przestrzeni	122
Prosta prostopadła do płaszczyzny	124
Kąty między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach	125
Kąt dwuścienny	127
Opis kąta dwuściennego $[\alpha]$	128
Przekroje płaskie prostopadłościanu	130

Walec, stożek, kula oraz sfera.....	131
Walec.....	131
Stożek.....	132
Kula.....	133
Bryły podobne.....	135
Statystyka, kombinatoryka, prawdopodobieństwo.....	137
Średnia arytmetyczna liczb.....	137
Własności średniej arytmetycznej.....	137
Średnia ważona liczb.....	137
Mediana.....	137
Dominanta zbioru liczbowego.....	138
Wariancja i odchylenie standardowe.....	138
Prawdopodobieństwo.....	138
Własności prawdopodobieństwa.....	140
Wartość oczekiwana.....	142
Kombinatoryka.....	143
Reguła sumy [prawo sumy].....	143
Reguła iloczynu [prawo iloczynu].....	143

Wstęp

Atlas matematyki zawiera wszystkie podstawowe definicje, wzory i twierdzenia, których znajomość wymagana jest na egzaminie maturalnym na poziomie podstawowym dla uczniów szkół średnich. W publikacji położono duży nacisk na analizę dowodów, ponieważ uzasadnianie twierdzeń odgrywa kluczową rolę w rozumieniu matematyki. W książce znajduje się wiele przykładów, dzięki którym uczeń z łatwością zastosuje teoretyczne zagadnienia w praktyce – będzie wiedział, dlaczego stosuje się takie, a nie inne wzory oraz który sposób rozwiązania zadania jest poprawny.

Atlas wzbogaca ponad 200 schematów ilustrujących omawiane na lekcjach matematyki zagadnienia. Ułatwiają one przyswojenie definicji i twierdzeń oraz pomagają zrozumieć przedstawione dowody.

Niektóre treści w książce wykraczają poza podstawę programową. Oznaczono je jako „Ciekawostki”. Ich główną rolą jest poszerzenie horyzontów myślowych.

► Jak korzystać z książki

Przed rozpoczęciem korzystania z *Atlasu matematyki* warto zobaczyć jak zaprojektowane zostały poszczególne elementy książki. Układ jest bardzo intuicyjny, dzięki czemu szybko można odnaleźć potrzebne informacje.

Tytuł rozdziału, czyli kolejne omawiane na lekcjach **działy matematyki**

Informacje dotyczące danego działu matematycznego podane w przystępny sposób

Ciekawostki dotyczące wybranych zagadnień matematycznych

Analiza krok po kroku dowodu matematycznego

Definicje i twierdzenia wraz ze wzorami, których znajomość jest wymagana na egzaminie maturalnym

Liczby rzeczywiste

► Zbiory
Zbiór to inaczej kolekcja, zestaw. Zbiór niepusty składa się z elementów, natomiast zbiór pusty nie ma żadnych elementów. Zbiór pusty oznacza się symbolem $\emptyset$. Zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez wszystkie swoje elementy. Można tworzyć zbiory, których elementami są (inne) zbiory. Kolejność wymieniania elementów nie ma znaczenia dla wyznaczania zbioru. Każdy element zbioru może być wymieniany więcej niż raz. To, że a jest elementem zbioru A , zapisujemy $a \in A$.

Definicja. W matematyce szkolnej ważną rolę odgrywają zbiory liczbowe takie, jak zbiór wszystkich liczb naturalnych $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, zbiór wszystkich liczb całkowitych $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ (można też używać C), zbiór liczb wszystkich liczb wymiernych Q , czyli liczb postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in Z, n \neq 0$ (można też używać W), zbiór liczb wszystkich liczb rzeczywistych R .

Umieszczenie indeksu górnego $+$ lub $-$ wskazuje, że w zbiorze są tylko liczby dodatnie albo tylko ujemne. Na przykład Z^+ oznacza liczby całkowite ujemne.

Uwaga. Oprócz zbioru liczb rzeczywistych w matematyce ważną rolę odgrywa zbiór liczb zespolonych. Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in R$, natomiast i jest tzw. **jednostką urojoną**, zdefiniowaną wzorem $i = \sqrt{-1}$. Pierwiastek z liczby ujemnej nie może być liczbą rzeczywistą, więc i nie jest liczbą rzeczywistą, choć jest liczbą. Łatwy rachunek pokazuje, że są cztery liczby zespolone, które podniesione do potęgi czwartej dają 1 – są to $1, -1, i, -i$. Liczby zespolone odgrywają istotną rolę w samej matematyce, jak i w zastosowaniach, np. w analizie obwodów elektrycznych prądu zmiennego. Nazwy „liczba rzeczywista” czy „liczba urojona” są więc nieco mylące.

► Wybrane zbiory liczbowe

Twierdzenie
Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony.

Dowód
Zbiór liczb naturalnych ma tę własność, że jeśli m jest liczbą naturalną, to również $m + 1$ jest liczbą naturalną. Gdyby wszystkich liczb naturalnych było skończenie wiele, to byłaby wśród nich największa (oznaczymy ją jako k). A przecież wówczas jednak z jednej strony $k + 1$, jako większa niż k , nie należałaby do zbioru liczb naturalnych, a z drugiej właśnie jako $k + 1$ jest liczbą naturalną. Ta sprzeczność dowodzi, że wszystkich liczb naturalnych jest nieskończenie wiele.

Definicja. Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki.

Nie ma wzoru określającego wszystkie liczby pierwsze. Jest tylko jedna liczba pierwsza parzysta.

Twierdzenie
Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

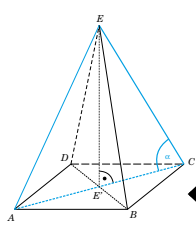
Dowód
Załóżmy, że zbiór liczb pierwszych jest skończony. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą wszystkimi elementami tego zbioru i niech p_k będzie największą liczbą pierwszą. Wówczas dowolną liczbę złożoną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych z odpowiednimi potęgami; np. $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$. Liczba $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ nie jest złożona, gdyż przy dzieleniu przez dowolną liczbę pierwszą daje resztę 1 . Zatem a jest liczbą pierwszą większą niż p_k , co daje sprzeczność. Zatem liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Stereometria

5. Kąt między krawędzią boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego a przekątną podstawy wychodzącą z tego samego wierzchołka
 Trójkąt ACE jest równoramienny, a trójkąt $E'CE$ jest prostokątny. AC jest przekątną podstawy, zaś EE' jest wysokością ostrosłupa. Te informacje umożliwiają wyliczenie kąta α .

Przykład
 Dane: $AB = 6\sqrt{2}$, $EE' = 9$. Szukane: α .

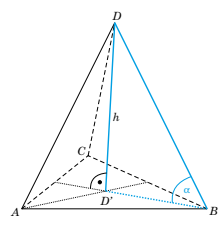
Rozwiązanie. Przekątna $AC = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 12$. Zatem: $E'C = 6$.
 Z $\Delta E'CE$ mamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{6} = 1,5$.
 Z tablicy wartości trygonometrycznych (zob. s. 72) odczytujemy, że: $56^\circ < \alpha < 57^\circ$.



6. Kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną graniastosłupa prawidłowego trójkątnego
 Z racji szczególnych własności trójkąta równobocznego punkt D' jest punktem przecięcia wysokości, które dzielą się w stosunku 2:1.

Przykład
 Dane: $AB = 12$, $DD' = 6$. Szukane: α .

Rozwiązanie. Wysokość podstawy wynosi:
 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. $|BD'| = \frac{2}{3}h = 4\sqrt{3}$.
 Z $\Delta D'DB$ mamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = 0,866$.
 Z tablicy wartości trygonometrycznych (zob. s. 73) odczytujemy, że: $40^\circ < \alpha < 41^\circ$.



► **Kąt dwuścienny**

Definicja. Kątem dwuściennym nazywamy część przestrzeni zawartą między dwoma półpłaszczyznami o wspólnej krawędzi (prostej) wraz z tymi półpłaszczyznami.

Kąt dwuścienny

127

Praktyczne **przykłady** z rozwiązaniami

Przejrzyste **ilustracje** pomagające zrozumieć zagadnienie z danego działu matematyki

Hasła na marginesach, dzięki którym można szybko odnaleźć potrzebne definicje lub twierdzenia

Funkcje

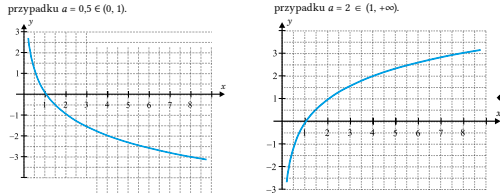
► **Funkcja logarytmiczna**

Definicja. Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję o wzorze: $y = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$.

Przykład

a) Wykres funkcji $y = \log_{0,5} x$. Zwróć uwagę, że w tym przypadku $a = 0,5 \in (0, 1)$.

b) Wykres funkcji $y = \log_2 x$. Zwróć uwagę, że w tym przypadku $a = 2 \in (1, +\infty)$.



Twierdzenie
 Wykresy funkcji $y = \log_a x$ oraz $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ są symetryczne względem siebie – osią symetrii jest oś Ox .
 Wykresy funkcji $y = \log_a x$ oraz $y = a^x$ są symetryczne względem siebie – osią symetrii jest prosta o równaniu $y = x$.

Twierdzenie
 Funkcja wykładnicza $y = a^x$ oraz funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ są funkcjami do siebie odwrotnymi, to znaczy ich złożenie jest funkcją identycznościową.

Dowód

$$a^{\log_a x} = x \quad \log_a a^x = x$$

$$\log_a a^x = x \log_a a = x \cdot 1 = x$$

► **Własności funkcji logarytmicznej**

Własność	$y = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1)$	$y = \log_a x$, gdzie $a \in (1, +\infty)$
Dziedzina	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Zbiór wartości	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wartość największa	nie ma	nie ma
Wartość najmniejsza	nie ma	nie ma
Asymptota pionowa	$x = 0$ (lewostronna)	$x = 0$ (lewostronna)
Miejsca zerowe	nie ma	nie ma
Monotoniczność	malejąca w całej dziedzinie	rosnąca w całej dziedzinie
Punkty charakterystyczne	wykreś funkcji przechodzi przez punkt $(1, 0)$	wykreś funkcji przechodzi przez punkt $(1, 0)$

Półlogarytmiczny układ współrzędnych to taki układ współrzędnych, w których jedna oś ma skalę logarytmiczną, a druga ma skalę zwykłą. Skala logarytmiczna (o podstawie a) to taka skala, w której jednostkę n w skali głównej odpowiada jednostka a^n . Aby otrzymać z nowej skali skalę zwykłą, trzeba jej jednostki zlogarytmować logarytmem o podstawie a .

61

Przydatne **wykresy** ilustrujące omawiane zagadnienia

Praktyczne i przejrzyste **tabele**, w których zebrano najważniejsze informacje systematyzujące wiedzę

Liczby rzeczywiste

► Zbiory

Zbiór to inaczej kolekcja, zestaw. Zbiór niepusty składa się z elementów, natomiast zbiór pusty nie ma żadnych elementów. Zbiór pusty oznacza się **symbolem** $\emptyset$. Zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez wszystkie swoje elementy. Można tworzyć zbiory, których elementami są (inne) zbiory. Kolejność wymieniania elementów nie ma znaczenia dla wyznaczania zbioru. Każdy element zbioru może być wymieniany więcej niż raz. To, że a jest elementem zbioru A , zapisujemy $a \in A$.

Definicja. W matematyce szkolnej ważną rolę odgrywają zbiory liczbowe takie, jak zbiór wszystkich liczb naturalnych $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, zbiór wszystkich liczb całkowitych $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ (można też używać C), zbiór liczb wszystkich liczb wymiernych Q , czyli liczb postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in Z, n \neq 0$ (można też używać W), zbiór liczb wszystkich liczb rzeczywistych R .

Zbiory
liczbowe

Umieszczenie indeksu górnego $+$ lub $-$ wskazuje, że w zbiorze są tylko liczby dodatnie albo tylko ujemne. Na przykład Z^- oznacza liczby całkowite ujemne.

Uwaga. Oprócz zbioru liczb rzeczywistych w matematyce ważną rolę odgrywa zbiór liczb zespolonych. Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in R$, natomiast i jest tzw. **jednostką urojoną**, zdefiniowaną wzorem $i = \sqrt{-1}$. Pierwiastek z liczby ujemnej nie może być liczbą rzeczywistą, więc i nie jest liczbą rzeczywistą, choć jest liczbą. Łatwy rachunek pokazuje, że są cztery liczby zespolone, które podniesione do potęgi czwartej dają 1 – są to $1, -1, i, -i$. Liczby zespolone odgrywają istotną rolę w samej matematyce, jak i w zastosowaniach, np. w analizie obwodów elektrycznych prądu zmiennego. Nazwy „liczba rzeczywista” czy „liczba urojona” są więc nieco mylące.

Ciekawostka

► Wybrane zbiory liczbowe

Twierdzenie

Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony.

Nieskoń-
czoność
zbioru liczb
naturalnych

Dowód

Zbiór liczb naturalnych ma tę własność, że jeśli m jest liczbą naturalną, to również $m + 1$ jest liczbą naturalną. Gdyby wszystkich liczb naturalnych było skończenie wiele, to byłaby wśród nich największa (oznaczymy ją jako k). A przecież wówczas jednak z jednej strony $k + 1$, jako większa niż k , nie należałaby do zbioru liczb naturalnych, a z drugiej właśnie jako $k + 1$ jest liczbą naturalną. Ta sprzeczność dowodzi, że wszystkich liczb naturalnych jest nieskończenie wiele.

D

Definicja. Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki.

Liczba
pierwsza

Nie ma wzoru określającego wszystkie liczby pierwsze. Jest tylko jedna liczba pierwsza parzysta.

Twierdzenie

Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

Zbiór liczb
pierwszych

Dowód

Założmy, że zbiór liczb pierwszych jest skończony. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą wszystkimi elementami tego zbioru i niech p_k będzie największą liczbą pierwszą. Wówczas dowolną liczbę złożoną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych z odpowiednimi potęgami; np. $p_1^2 \cdot p_3^4$. Liczba $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ nie jest złożona, gdyż przy dzieleniu przez dowolną liczbę pierwszą daje resztę 1 . Zatem a jest liczbą pierwszą większą niż p_k , co daje sprzeczność. Zatem liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

D

Zapis liczby
wymierniej
niecałkowitej**Twierdzenie**

Każdą liczbę wymierną niecałkowitą można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego. Z drugiej strony, jeśli liczba rzeczywista ma zapis dziesiętny skończony lub nieskończony okresowy, to jest liczbą wymierną.

Liczby o rozwinięciu dziesiętnym skończonym można zapisać również w postaci liczby dziesiętnej nieskończonej okresowej – np. $0,5 = 0,4(9)$. Również liczby całkowite mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone okresowe – np. $1 = 0,(9)$.

D**Dowód**

Przeprowadzamy dowód na to, że $1 = 0,(9)$. Niech $x = 0,(9)$. Wówczas $10x = 9,(9)$. Zatem $10x - x = 9$, skąd $x = 1$.

D**Dowód nieformalny**

Jeżeli liczba a jest większa niż b , to istnieje liczba c między liczbami b oraz a . Spróbuj wpisać liczbę między $0,9999999(9)$ a $1,0000000(0)$. **Można się przekonać, że nie jest to możliwe, więc $0,(9) = 1$.**

Liczba
niewymierna

Definicja. Liczba niewymierna to liczba rzeczywista, która nie jest wymierna.

Kiedy liczba jest
niewymierna?**Twierdzenie**

Liczba jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

P**Przykład**

Liczbą niewymierną jest: $0,10100100010000\dots$ – „po kolejnej cyfrze 1 jest o jedno zero więcej”. Przykład z tą liczbą odwołuje się bezpośrednio do okresu rozwinięcia dziesiętnego (a w zasadzie jego braku). Liczb niewymiernych jest nieskończenie wiele. Ważnymi liczbami niewymiernymi są liczba π oraz liczba e .

► Relacje między zbiorami

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Odniesiemy więc wtedy do następujących definicji:

Definicja.

1. Powiemy, że zbiór A **zawiera się** w zbiorze B (zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , a zbiór B jest **nadzbior**em zbioru A); symbolicznie: $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Dla przykładu $N \subset Z \subset Q \subset R$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.
2. Zbiory A i B są **równe**; symbolicznie: $A = B$, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót: każdy element zbioru B jest elementem zbioru A . Dla przykładu, jeśli A jest zbiorem trzech najmniejszych liczb pierwszych, zaś $B = \{2, 3, 5\}$, to $A = B$. Jeśli zbiory A i B są równe, to każdy z nich jest podzbiorem drugiego zbioru.
3. Zbiory A i B są **rozłączne**; symbolicznie: $A \cap B = \emptyset$, jeśli nie mają wspólnych elementów. Zbiór pusty jest rozłączny z każdym zbiorem.
4. Czasami wprowadza się pojęcie **krzyżowania** zbiorów: zbiory A i B krzyżują się, jeśli mają elementy wspólne oraz każdy z nich ma elementy nienależące do drugiego zbioru.

Podzbiór
i nadzbiórZbiory
równeZbiory
rozłączneZbiory
krzyżujące się

Przekreślenie symbolu relacji między zbiorami oznacza **zanegowanie relacji**. Dla przykładu $A \neq B$ oznacza, że zbiory A i B nie są równe, tzn. istnieje element należący do A , ale nie należący do B , lub na odwrót. Dla przykładu $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 2\}$, $\{1, 2, 8\} \neq \{1, 2, 9\}$. $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem zbioru B – tzn. istnieje element zbioru A , który nie należy do zbioru B . Dla przykładu, $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 4\}$.

► Działania na zbiorach

Definicja. Niech U będzie uniwersum, czyli takim zbiorem, że wszystkie rozpatrywane zbiory są jego podzbiory. **Sumą zbiorów** A i B ; symbolicznie $A \cup B$, nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które należą do jednego zbioru lub do drugiego (dopuszcza się sytuację, że element należy do obu zbiorów jednocześnie). **Częścią wspólną (iloczynem)** zbiorów A i B ; symbolicznie $A \cap B$ nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które należą do obu zbiorów jednocześnie. **Dopełnieniem** zbioru A ; symbolicznie: A' , nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które nie należą do A . **Różnicą zbiorów** $A \setminus B$ nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru A , które nie są elementami zbioru B .

Suma, iloczyn,
różnica
i dopełnienia
zbiorów

Warto zauważyć, że $A' = U \setminus A$. W niektórych sytuacjach językowym odpowiednikiem odejmowania zbiorów jest słowo „oprócz”. Dla przykładu $\mathbf{R} \setminus \{5\}$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oprócz 5.

Przykład

Niech $U = \mathbf{N}$.

- a) $\{2, 3, 4\} \cup \{4, 1, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. c) $\{2, 3, 4\} \setminus \{4, 1, 6\} = \{2, 3\}$.
b) $\{2, 3, 4\} \cap \{4, 1, 6\} = \{4\}$. d) $\{2, 3, 4\}' = \{0, 1, 5, 6, 7, \dots\} = \{0, 1, 2\} \cup \{n \in \mathbf{N} : n \geq 5\}$.

P

► Przedziały liczbowe

Przedziały liczbowe to specjalne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja. Niech $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ oraz $a < b$. **Przedział** (a, b) jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a i jednocześnie mniejszych niż b . **Przedział** $[a, b]$ jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych lub równych a i jednocześnie mniejszych lub równych b . **Przedział** $(a, +\infty)$ jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a . **Przedział** $(-\infty, b]$ jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych mniejszych lub równych b . **Przedział** $(-\infty, +\infty)$ jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Przedziały
liczbowe

Przykład

Na rysunku pokazano sumę, część wspólną i różnice zbiorów:

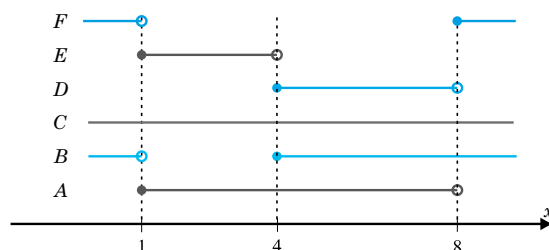
$A = [1, 8)$ oraz $B = (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$.

$C = A \cup B = (-\infty, +\infty)$,

$D = A \cap B = [4, 8)$,

$E = A \setminus B = (1, 4)$,

$F = B \setminus A = (-\infty, 1) \cup [8, +\infty)$.



P

Definicja. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest zdefiniowana następująco:

$$\text{wzór (1)}: |x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wartość
bezwzględna

Twierdzenie

Alternatywne określenia wartości bezwzględnej są następujące: wzór (2): $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x > 0 \\ -x & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$

$$\text{a) wzór (3): } |x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{b) wzór (4): } |x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad \text{c) wzór (5): } |x| = \sqrt{x^2}$$

Alternatywne
określenia
wartości
bezwzględnej

Te pięć wzorów jest równoważnych, co oznacza, że przyjmując dowolny z nich za definicję, pozostałe są twierdzeniami.

W niniejszej książce definicją wartości bezwzględnej jest wzór (1) – tak się przyjmuje najczęściej.

Własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

Twierdzenie

Wzory (2) – (5) są własnościami wartości bezwzględnej. A ponadto dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$:

- $|x| \geq 0$ – wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna,
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – wartość bezwzględna liczby jest równa 0 tylko dla 0,
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ – wartość bezwzględna liczby różnej od zera jest liczbą dodatnią,
- $|x| = |-x|$ – wartość bezwzględna liczby i wartość bezwzględna liczby do niej przeciwnej są równe,
- $x^2 = (-x)^2 = |x|^2$.

Własności
wartości
bezwzględnej

Wartość bezwzględna jest związana z pierwiastkiem kwadratowym.

P

Przykład

a) $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, b) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Twierdzenie

Dla każdego x zachodzi:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo wyciągnąć wniosek, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi wzór: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Pierwiastek
kwadratowy
a wartość
bezwzględna

P

Przykład

Rozwiążemy równanie: $x^2 = 9$. Obie strony można spierwiastkować, gdyż wyrażenie x^2 jest nieujemne, a 9 jest dodatnie. Po obustronnym spierwiastkowaniu obu stron równania otrzymamy: $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$. Zatem $|x| = 3$. A stąd $x = 3$ lub $x = -3$.

Twierdzenie

Dla każdej **nieujemnej** liczby x zachodzi wzór: $(\sqrt{x})^2 = x$.

Zastrzeżenie o nieujemności wynika stąd, że liczba pod pierwiastkiem musi być nieujemna.

Kwadrat
pierwiastka
kwadratowego

D

Dowód

Dowodzimy to w następujący sposób: $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow (y^2 = x \wedge y \geq 0)$. Zatem $(\sqrt{x})^2 = y^2 = x$.

► Przybliżenie liczby

Dana liczba może być przybliżona z nadmiarem lub z niedomiarem. To, czy należy przybliżyć liczbę z nadmiarem czy z niedomiarem zależy od kontekstu praktycznego, co zostanie pokazane na przykładach. Liczba jest **przybliżona z niedomiarem**, gdy liczba przybliżona jest mniejsza niż przybliżana. Liczba jest **przybliżana z nadmiarem**, gdy liczba przybliżona jest większa niż przybliżana.

P

Przykład

- Przybliżenia z niedomiarem: $234,67 \approx 234,6$ ($234,6 < 234,67$); $234,67 \approx 200$ ($200 < 234,67$).
- Przybliżenia z nadmiarem: $234,67 \approx 234,7$ ($234,7 > 234,67$); $234,67 \approx 300$ ($300 > 234,67$).
- Klasa licząca 28 uczniów ma wystawić jednorazowo 9 zespołów 3 osobowych do konkursu szkolnego (przybliżenie z niedomiarem).
- Potrzebne są 3 autokary z 56 miejscami do przewiezienia 123 uczniów oraz 14 nauczycieli na wycieczkę szkolną (przybliżenie z nadmiarem).

► Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

Twierdzenie

Niech dana będzie liczba L i jej przybliżenie P : $L \approx P$. **Błąd bezwzględny** przybliżenia wyraża się wzorem $\Delta L = |L - P|$.

Błąd bezwzględny

Twierdzenie

Błąd względny przybliżenia wyraża się wzorem $\delta L = \frac{\Delta L}{L}$.

Błąd względny często przedstawia się w postaci procentowej – wystarczy otrzymaną liczbę zamienić na procenty. Błąd względny często podaje się z odpowiednim przybliżeniem.

Błąd względny

Przykład

Liczba	Przybliżenie liczby	Rodzaj przybliżenia	Błąd bezwzględny	Błąd względny
5,5	5	z niedomiarem	0,5	$\frac{0,5}{5} = 0,1 = 10\%$
5,5	6	z nadmiarem	0,5	$\frac{0,5}{5} = 0,1 = 10\%$
40,44	40,4	z dokładnością do części dziesiętnych	0,04	$\frac{0,04}{40,44} = 0,09891\%$

P

► Potęgi i pierwiastki

Potęga o dodatnim wykładniku naturalnym ma intuicyjne wyjaśnienie: jest to mnożenie, w którym wszystkie czynniki są równe.

Definicja. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n -tą potęgę ($n \in \mathbb{N}, n > 0$): $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$.

Ponadto przyjmuje się, że $a^0 = 1$, o ile $a \neq 0$.

Potęgi i pierwiastki

Przykład

Udowodnimy, że wyrażenie $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}$) jest podzielne przez 12. Przekształcamy je następująco $5^n(1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 5^n \cdot 156 = 5^n \cdot 13 \cdot 12$. Widać, że wyrażenie to jest podzielne przez 12 (oraz 13).

Warto zapamiętać wybrane potęgi liczb: potęgi liczby 2: od trzeciej (2^3) do dziesiątej (2^{10}), kwadraty liczb: od 11^2 do 19^2 oraz 25^2 , sześciany liczb od 3^3 do 9^3 ; ciekawostka: $11^3 = 1331$.

Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej $a \neq 0$ o wykładniku całkowitym ujemnym $-n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, definiuje się następująco: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potęga liczby rzeczywistej o wykładniku ujemnym

Aby wyjaśnić, sens potęgi o wykładniku całkowitym, zauważmy, że $a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = \frac{1}{a^n}$.

Definicja. Definicja pierwiastka (arytmetycznego) z liczby rzeczywistej uzależniona jest od parzystości stopnia pierwiastka.

- Jeżeli n jest liczbą dodatnią liczbą parzystą, to **pierwiastkiem** (arytmetycznym) n -tego stopnia z liczby rzeczywistej nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , że $b^n = a$.
- Jeżeli n jest liczbą dodatnią liczbą nieparzystą, to **pierwiastkiem** (arytmetycznym) n -tego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , że $b^n = a$.

Pierwiastek arytmetyczny

Twierdzenie

Przy założeniu, że jeżeli stopnie pierwiastków są liczbami parzystymi, to a oraz b są nieujemne, zachodzą następujące prawa (zakładamy, że $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$).

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$$

dodatkowe założenie: $b > 0$

Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej $a > 0$ o wykładniku postaci $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, definiuje się następująco:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$
► Potęga o wykładniku wymiernym

Definicja. Potęgę liczby rzeczywistej $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$ o wykładniku postaci $\frac{k}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, definiuje się następująco: $a^{\frac{k}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

P**Przykład**

Zapiszemy w postaci jednej potęgi wyrażenie $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{5^7}$.

Kalkulator zwykły pozwala na wyliczenie pierwiastka kwadratowego (czyli stopnia drugiego), ale żeby wyliczyć pierwiastek sześcienny, trzeba skorzystać już z kalkulatora naukowego. W niektórych sytuacjach można się posłużyć przydatnymi przybliżeniami pierwiastków.

Aby uchwycić sens potęgi o wykładniku niewymiernym, trzeba się odwołać do teorii granic ciągów liczbowych. Podstawową intuicję pokażemy na przykładzie. Aby obliczyć $3^{\sqrt{2}}$, tworzymy ciąg liczb wymiernych zmierzających do $\sqrt{2}$. Takim ciągiem mogą być kolejne, coraz lepsze, przybliżenia $\sqrt{2}$. Wypiszmy kilka początkowych przybliżeń $\sqrt{2}$: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421. Wówczas ciąg liczb: $3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; 3^{1,4142}; 3^{1,41421}$ jest coraz bliższy wartości $3^{\sqrt{2}}$. Liczby z tego ciągu można zapisać w postaci „potęgowo – pierwiastkowej”:

$$3^{1,4} = 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{3^{14}}$$

$$3^{1,41} = 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{3^{141}} \text{ itd.}$$

► Ogólne prawa potęgowania**Twierdzenie**

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, niech $a, b > 0$. Zachodzą wzory:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeśli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to wzory te zachodzą dla każdego $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

► Pierwiastki

Własności pierwiastków wynikają z ogólnych praw potęgowania.

P**Przykład**

Zapiszemy w postaci jednej potęgi wyrażenie: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{5^7}$.