

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY !

REPETYTORIUM

MATEMATYKA

- ▶ materiał zgodny z podstawą programową
- ▶ powtórzenie wiadomości
- ▶ kompleksowe przygotowanie
- ▶ zadania z odpowiedziami

SUKCES
GWARANTOWANY!



Joanna Walczak, Mateusz Pawłowski

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY!

REPETYTORIUM

MATEMATYKA



Autorzy: **Jolanta Walczak** (część teoretyczna), **Mateusz Pawłowski** (ćwiczenia powtórzeniowe)

Konsultacja i uzupełnienie: **Mariola Wróblewska**

Korekta: **zespół Wydawnictwa SBM**

Ilustracje: **Jarosław Jabłonka, Agata Mościcka**

Opracowanie graficzne i skład: **Agata Mościcka, Paweł Bednarek**

Redaktor prowadzący: **Anna Willman**

Projekt okładki: **Wioletta Kanik**

Zdjęcia w książce: **Deamstime.com**: © Darrati10 (7), © Arseniukoleksii (78), © Svetlana Avvakumova (106), © Tuulijumala (106), © Olgacov (106), © Kostyantine Pankin (106), © Blueringmedia (106), © Valya567 (106).

Zdjęcia na okładce: **Deamstime.com**: © Ian Andreiev, © Roman Egorov, © Gorrnicko

Copyright for text, cover and layout © Wydawnictwo SBM, 2023

Warszawa 2023



Wydawnictwo SBM Sp. z o.o.

ul. Sułkowskiego 2/2

01-602 Warszawa

www.wydawnictwo-sbm.pl

WSTĘP	6
I. LICZBY	7
1. Liczby naturalne	7
2. System liczbowy dziesiętkowy	7
3. System rzymski	8
4. Oś liczbowa	9
5. Liczby przeciwne	11
6. Liczby całkowite	12
7. Dzielnik liczby	12
8. Wielokrotności liczb naturalnych	13
9. Liczby pierwsze i złożone	13
10. Rozkład liczb złożonych na czynniki pierwsze	13
11. Największy wspólny dzielnik (NWD)	14
12. Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)	15
13. Liczby parzyste i nieparzyste	15
14. Cechy podzielności liczb	16
15. Wartość bezwzględna liczby	16
16. Porównywanie liczb całkowitych	17
17. Ułamki zwykłe	18
18. Ułamki właściwe i niewłaściwe	19
19. Liczby mieszane	19
20. Ułamki nieskracalne	20
21. Rozszerzanie ułamków zwykłych	21
22. Skracanie ułamków zwykłych	22
23. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika	22
24. Porównywanie ułamków zwykłych	23
25. Ułamki dziesiętne	24
26. Skracanie i rozszerzanie liczb w postaci dziesiętnej	25
27. Zamiana ułamków zwykłych na dziesiętne	25
28. Przybliżenia dziesiętne	26
29. Zasada zaokrąglania liczb	26
30. Wyrażenia dwumianowane	27
31. Liczby wymierne	28
32. Przykłady liczb niewymiernych	28
33. Liczby odwrotne	28
II. DZIAŁANIA NA LICZBACH	29
1. Rachunek pamięciowy na liczbach naturalnych	29
2. Dzielenie z resztą	29
3. Potęga o wykładniku naturalnym i całkowitym	30
4. Notacja wykładnicza	31
5. Prawa działań	32
6. Tabliczka mnożenia	33
7. Rachunek pisemny na liczbach wielocyfrowych	33
8. Kolejność wykonywania działań	35
9. Działania na liczbach całkowitych	36
10. Działania na ułamkach zwykłych	38
11. Działania na liczbach dziesiętnych	41
12. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych	45
13. Działania na potęgach o wykładniku naturalnym	46
14. Pierwiastek kwadratowy i sześcienny	47
15. Działania na pierwiastkach	48

III. OBLICZENIA PROCENTOWE.....	51
1. Pojęcie procentu	51
2. Zamiana procentu na ułamek.....	51
3. Zamiana liczby na procent.....	51
4. Obliczanie procentu danej liczby.....	51
5. Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent.....	52
6. Obliczanie jakim procentem jednej liczby jest druga liczba.....	52
IV. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE	53
1. Kartezjański układ współrzędnych	53
2. Współrzędne punktów w układzie kartezjańskim	53
3. Punkty kratowe.....	54
4. Długość odcinka o danych współrzędnych jego końców	54
5. Współrzędne środka odcinka o danych współrzędnych jego końców	55
V. RACHUNEK ALGEBRAICZNY.....	56
1. Wyrażenie algebraiczne.....	56
2. Jednomian	56
3. Porządkowanie jednomianów.....	56
4. Suma algebraiczna	57
5. Nazwa wyrażenia algebraicznego.....	57
6. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego	57
7. Wyrazy podobne – redukcja wyrazów podobnych.....	58
8. Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych.....	58
9. Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian	59
10. Mnożenie dwumianu przez dwumian	59
VI. RÓWNANIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.....	60
1. Równanie i sprawdzanie czy dana liczba spełnia równanie.....	60
2. Równania równoważne	61
3. Rozwiązywanie równań liniowych metodą równań równoważnych	61
4. Liczba rozwiązań równania liniowego	62
5. Przekształcanie wzorów	63
6. Wielkości wprost proporcjonalne	63
7. Proporcja i jej własności.....	64
8. Podział proporcjonalny.....	64
VII. ELEMENTY STATYSTYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA.....	66
1. Dane statystyczne.....	66
2. Sposoby prezentowania danych statystycznych.....	67
3. Średnia arytmetyczna	69
4. Zapisywanie zbiorów obiektów o danych własnościach	69
5. Reguła dodawania i mnożenia	70
6. Doświadczenie losowe	71
7. Zdarzenia elementarne doświadczenia losowego.....	71
8. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego	72
VIII. GEOMETRIA PŁASKA.....	73
1. Podstawowe figury geometryczne: punkt, prosta, półprosta, odcinek, łamana	73
2. Proste i odcinki prostopadłe	75
3. Proste i odcinki równoległe	76
4. Kąt, miara kąta.....	77
5. Kąty: ostre, prosty i rozwarte.....	79
6. Kąty wypukłe i wklęsłe	80
7. Kąty wierzchołkowe i przyległe	81
8. Kąty naprzemianległe i odpowiadające.....	82
9. Symetralna odcinka	84

10. Dwusieczna kąta	85
11. Wielokąty i ich nazwy	86
12. Wielokąty wypukłe i wklęsłe	86
13. Trójkąty – nierówność trójkąta	87
14. Klasyfikacja trójkątów ze względu na boki i kąty	89
15. Wysokość trójkąta	90
16. Kąty wewnętrzne i zewnętrzne trójkąta	91
17. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta	91
18. Własności trójkąta równoramiennego	92
19. Własności trójkąta równobocznego	92
20. Twierdzenie – założenie, teza i dowód twierdzenia	94
21. Cechy przystawiania trójkątów	95
22. Twierdzenie Pitagorasa	97
23. Czworokąty: prostokąty, kwadraty, równoległoboki, romby, trapezy	100
24. Własności czworokątów	101
25. Klasyfikacja czworokątów	101
26. Wielokąty foremne	103
27. Okrąg i koło	105
28. Jednostki długości i pola	107
29. Obwody i pola figur płaskich	108
30. Pierścień kołowy	113
31. Figury osiowosymetryczne	113
32. Figury środkowosymetryczne	114
IX. GEOMETRIA PRZESTRZENNA	116
1. Graniastosłupy	116
2. Rodzaje graniastosłupów prostych	117
3. Graniastosłupy prawidłowe	118
4. Siatki graniastosłupów	119
5. Ostrosłupy	121
6. Rodzaje ostrosłupów	122
7. Ostrosłupy prawidłowe	122
8. Siatki ostrosłupów	123
9. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula	124
10. Jednostki objętości	125
11. Pola powierzchni i objętości graniastosłupów oraz ostrosłupów	126
POTRENUJ PRZED EGZAMINEM. ZADANIA POWTÓRZENIOWE	129
I. Liczby	130
II. Działania na liczbach	133
III. Obliczenia procentowe	141
IV. Układ współrzędnych na płaszczyźnie	144
V. Rachunek algebraiczny	147
VI. Równania z jedną niewiadomą	150
VII. Elementy statystyki i prawdopodobieństwa	154
VIII. Geometria płaska	157
IX. Geometria przestrzenna	168
Rozwiązania i wskazówki do zadań	176

WSTĘP

Repetitorium, które trzymasz w rękach, to kompendium wiedzy przygotowane zgodnie z podstawą programową dla szkoły podstawowej. Skierowane jest przede wszystkim do uczniów przygotowujących się do egzaminu ósmoklasisty, ale zawarty w nim materiał okaże się świetną pomocą także dla dzieci z młodszych klas oraz dla młodzieży rozpoczynającej naukę w szkole ponadpodstawowej.

W pierwszej części książki zawarto wiadomości teoretyczne wraz z przykładami zadań, które – rozwiązywane krok po kroku – pozwolą opanować nawet najtrudniejsze zagadnienia. Definicje, wzory oraz inne treści warte zapamiętania są dodatkowo wyróżnione, dzięki czemu łatwo je odnaleźć.

Druga część repetytorium to zbiór starannie dobranych zadań powtórzeniowych z każdego działu, które pozwolą samodzielnie poćwiczyć i utrwalić zdobyte umiejętności. Na końcu książki zamieszczono rozwiązania wszystkich zadań.

Mamy nadzieję, że zebrane w jednym opracowaniu zagadnienia z zakresu szkoły podstawowej umożliwią ci utrwalenie matematycznej wiedzy, a różnorodne ćwiczenia z rozwiązaniami pomogą skutecznie przygotować się do tego ważnego egzaminu.

Życzymy powodzenia!

I. LICZBY

W szkole podstawowej każda z poznanych liczb jest **liczbą rzeczywistą**. Przykładem takich liczb są: -5 , 0 , 4 , $\sqrt{2}$, π . Wśród liczb rzeczywistych znajdują się **liczby całkowite**: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ oraz **naturalne**: $0, 1, 2, 3, \dots$. Istnieją też **liczby wymierne** (takie, które zapisuje się za pomocą ułamka). Są jeszcze **liczby niewymierne**, czyli np. pierwiastki $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ oraz takie liczby jak π . Liczby wymierne i niewymierne tworzą razem zbiór liczb rzeczywistych.

1. Liczby naturalne

Liczby naturalne to liczby, które służą do podania liczebności zbiorów i kolejności.

► Zadanie 1

Ile ikon przycisków muzycznych przedstawiono na ilustracji?



Odpowiedź: 18. Liczba ta to liczba naturalna.

► Zadanie 2

Które spośród podanych liczb: 2 , -1 , $3,5$, 15 , $\frac{2}{3}$ są naturalne?

Odpowiedź: By prawidłowo odpowiedzieć na to pytanie, zastanów się, czy mogą być 2 książki, minus jedna książka, 3,5 książki, 15 książek czy wreszcie $\frac{2}{3}$ książki? Rozwiązanie nasuwa się wtedy samo – mogą być 2 książki lub 15 książek. Zatem liczby naturalne to 2 i 15. Pozostałe nie są liczbami naturalnymi.

2. System liczbowy dziesiętkowy

Nasz system liczenia nazywa się **dziesiętkowym systemem pozycyjnym** z trzech powodów:

- Po pierwsze, do zapisu liczb używamy dziesięciu cyfr: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
- Po drugie, dziesięć jednostek niższego rzędu oznacza jedną jednostkę wyższego rzędu, czyli 10 jedności to jedna dziesiątka, 10 dziesiątek to jedna setka itd.
- Po trzecie, o wartości danej cyfry decyduje jej pozycja w liczbie.

Przykład

liczba	rząd tysięcy	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności	
923		9	2	3	$9 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$
1256	1	2	5	6	$1 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$

W przypadku liczby 923 cyfra 9 stoi w rzędzie setek, a zatem oznacza 900, cyfra 2 jest w rzędzie dziesiątek, oznaczając 20, a cyfra 3 jest w rzędzie jedności i oznacza 3.

Liczbę 923 można zapisać: $9 \cdot 100 + 20 \cdot 10 + 3 \cdot 1$.

Analogicznie w liczbie 1256 cyfra 1 stoi w rzędzie tysięcy itd.

➤ Zadanie 1

Z cyfr 0, 1, 2 utwórz najmniejszą i największą liczbę trzycyfrową. Oblicz różnicę tych liczb.

Odpowiedź: Największa liczba to 210, a najmniejsza 102, ponieważ w rzędzie setek nie można umieścić zera. Ich różnica, czyli wynik odejmowania, wynosi 108, czyli $210 - 102 = 108$.

➤ Zadanie 2

Dana jest liczba 253. Zapisz liczbę utworzoną z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności. Oblicz sumę i różnicę tych liczb.

Odpowiedź: Liczba utworzona z tych samych cyfr, ale zapisanych w odwrotnej kolejności to 352.

Suma to wynik dodawania: $253 + 352 = 605$.

Różnica to wynik odejmowania: $352 - 253 = 99$.

3. System rzymski

Do zapisu liczb w systemie rzymskim służą następujące znaki:

I – 1

X – 10

C – 100

M – 1000

V – 5

L – 50

D – 500

PAMIĘTAJ!

Używając zapisu liczb w systemie rzymskim, pamiętaj, że jeżeli przed liczbą większą znajduje się liczba mniejsza, oznacza to odejmowanie liczby mniejszej od większej.

IV oznacza $5 - 1 = 4$

CM oznacza $1000 - 100 = 900$

PAMIĘTAJ!

Jeżeli po liczbie większej jest mniejsza, oznacza to dodawanie.

VI oznacza $5 + 1 = 6$

DC oznacza $500 + 100 = 600$

PAMIĘTAJ!

Odjąć można tylko jedną liczbę o rząd mniejszą, a dodać maksymalnie trzy liczby o rząd większe.

VII oznacza $5 + 2 = 7$

LXXX to $50 + 30 = 80$

Aby zapisać liczbę 1479 w systemie rzymskim, należy najpierw zauważyć, że jest ona sumą liczb $1000 + 400 + 70 + 9$, a następnie obok siebie zapisać odpowiednie liczby rzymskie: 1000 – M, 400 – CD, 70 – LXX, 9 – IX, stąd:

$$1479 = \text{M CD LXX IX}$$

$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 400 & 70 & 9 \end{array}$

► Zadanie

Połącz w pary liczby rzymskie z odpowiednimi liczbami zapisanymi w systemie dziesiętkowym.

MCDI 397

CCCXCVII 490

CDXC 1401

Odpowiedź: Dzielimy pierwszą liczbę na setki, dziesiątki i jednostki:

CCC, XC, VII = $300 + 90 + 7$, co daje liczbę 397.

Dzielimy drugą liczbę na setki i dziesiątki:

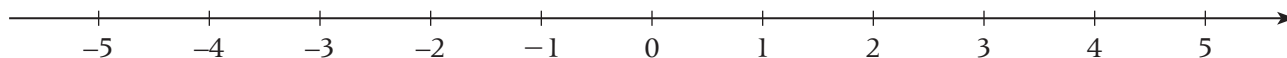
CD, XC = $400 + 90 = 490$.

Dzielimy trzecią liczbę na tysiące, setki i jednostki:

M, CD, I = $1000 + 400 + 1 = 1401$

4. Oś liczbowa

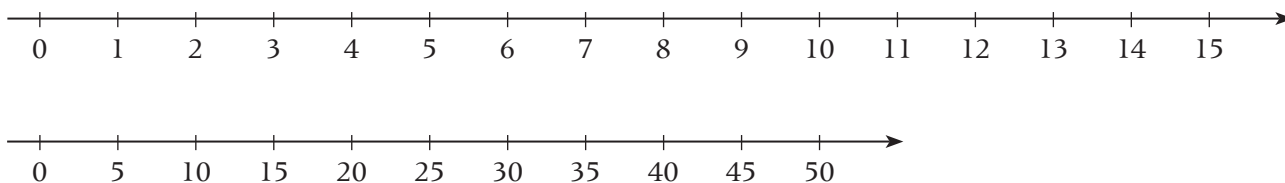
Oś liczbowa to prosta zakończona strzałką, na której zaznaczono punkt zerowy i odcinek jednostkowy.



Na prawo od zera zaznaczone są liczby dodatnie, a na lewo liczby ujemne. Odległość między kolejnymi liczbami na osi jest taka sama.

► Zadanie 1

Na rysunku poniżej pokazano przykłady osi liczbowych. Co oznacza odcinek jednostkowy na pierwszej osi, a co na drugiej?

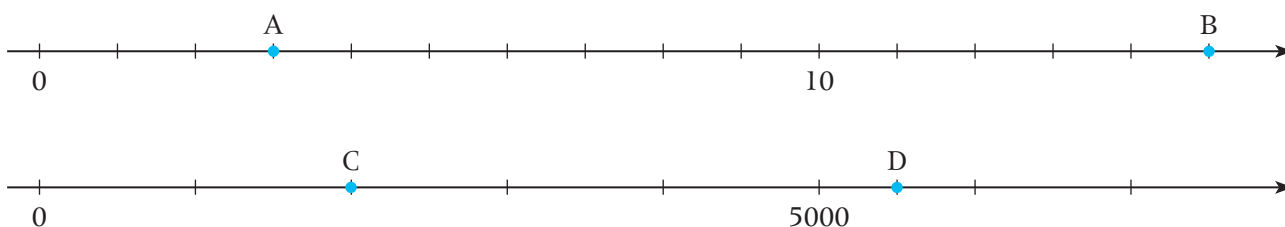


Odpowiedź:

Na pierwszej osi odcinek jednostkowy oznacza 1, a na drugiej 5.

► Zadanie 2

Jakie liczby oznaczono literami A, B, C, D?



Odpowiedź:

Najpierw należy odczytać, ile wynosi odcinek jednostkowy. Na pierwszej osi to 1, a na drugiej to 1000. Zatem $A = 3$, $B = 15$, $C = 2000$, a $D = 5500$.

► Zadanie 3

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających określone warunki, np.:

a) $x > 3$

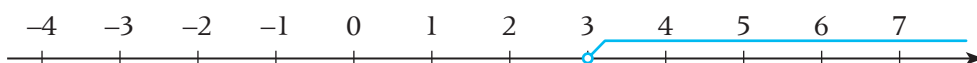
c) $x < -2,5$

b) $x \geq -1,5$

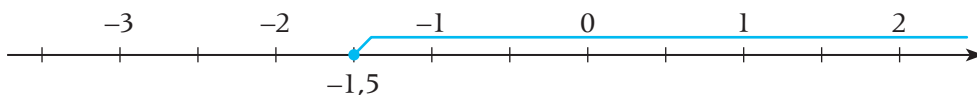
d) $x \leq 1\frac{1}{3}$

Odpowiedź

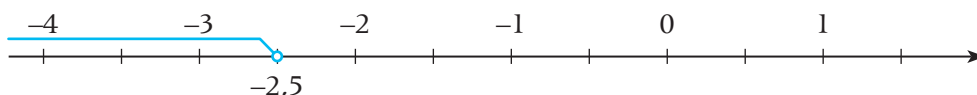
a) Rysujemy oś i zaznaczamy na niej liczbę 3. W miejscu liczby zaznaczamy kółko otwarte.



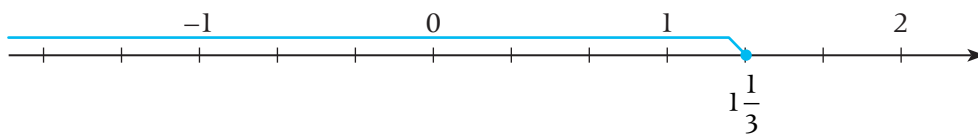
b) Rysujemy oś i zaznaczamy na niej liczbę $-1,5$. W miejscu liczby $-1,5$ zaznaczamy kółko zamknięte.



c) Rysujemy oś i zaznaczamy na niej liczbę $-2,5$. W miejscu liczby zaznaczamy kółko otwarte.



d) Rysujemy oś i zaznaczamy $1\frac{1}{3}$. W miejscu liczby zaznaczamy kółko zamknięte.



PAMIĘTAJ!

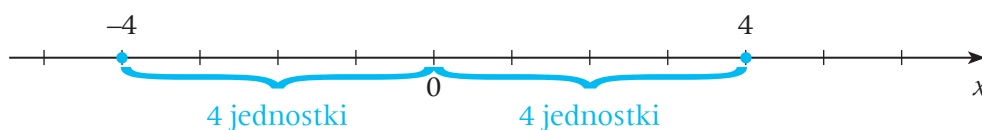
Jeżeli warunek jest zapisany $<$ lub $>$, to na osi liczbowej w miejscu liczby wstawiamy kółko otwarte (puste w środku), a jeżeli warunek jest zapisany $\leq$ lub $\geq$, to na osi liczbowej w miejscu liczby wstawiamy kółko zamknięte (wypełnione w środku).

5. Liczby przeciwne

Liczby przeciwne to para liczb leżących po przeciwnych stronach zera na osi liczbowej, ale w takiej samej odległości. Różnią się zatem tylko znakiem. Wyjątek stanowi zero. Liczbą przeciwną do zera jest zero.

Przykład

Zaznaczmy na osi liczbowej liczby 4 i -4 . Widać, że leżą one po przeciwnych stronach zera na osi liczbowej.



► Zadanie 1

Do każdej z liczb podaj liczbę przeciwną:

2, -5 , $-1,5$, $2\frac{2}{3}$

Odpowiedź:

Dana liczba	Liczba przeciwna	Dana liczba	Liczba przeciwna
2	-2	-1,5	1,5
-5	5	$2\frac{2}{3}$	$-2\frac{2}{3}$

► Zadanie 2

Jaka jest odległość między liczbami -5 i 5 ?

Odpowiedź: Odległość liczby -5 od 0 jest równa 5 , a odległość liczby 5 od 0 także jest równa 5 , zatem odległość między liczbami -5 i 5 wynosi 10 .

6. Liczby całkowite

Jeżeli utworzymy zbiór liczb składający się z liczb naturalnych i liczb przeciwnych do naturalnych, to otrzymamy **zbiór liczb całkowitych**.

► Zadanie 1

Spośród podanych liczb: -2 , 5 , 3 , 7 , $1,2$, $3\frac{2}{3}$, $-2,25$, 0 , -11 , wybierz liczby naturalne i liczby całkowite.

Odpowiedź: Liczby naturalne to: 3 , 5 , 7 , 0 , a liczby całkowite to: -2 , 5 , 3 , 7 , 0 , -11 .

7. Dzielnik liczby

Czy 35 cukierków można rozdzielić między 7 osób, tak aby nie został żaden cukierek i każda z osób dostała tyle samo cukierków? Czy można w ten sposób rozdzielić te cukierki między 5 lub 35 osób? A może dać wszystkie jednej osobie? Na każde z postawionych pytań odpowiedź brzmi – tak. Zatem liczby 1 , 5 , 7 i 35 to dzielniki liczby 35 .

Zbiór dzielników liczby 35 można zapisać tak: $D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$.

Dzielniki liczb są to takie liczby, przez które dana liczba dzieli się bez reszty (z resztą 0).

Dzielnikami liczby 100 są następujące liczby: 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20 , 25 , 50 i 100 . Jeżeli 100 podzielimy przez każdą z nich, to otrzymany wynik jest liczbą całkowitą:

$100 : 1 = 100$	$100 : 5 = 20$	$100 : 25 = 4$
$100 : 2 = 50$	$100 : 10 = 10$	$100 : 50 = 2$
$100 : 4 = 25$	$100 : 20 = 5$	$100 : 100 = 1$

► Zadanie 1

Podaj wszystkie dzielniki liczb: 27 i 32 .

Odpowiedź: Aby znaleźć dzielniki liczby, należy podzielić ją przez kolejne liczby naturalne mniejsze od jej połowy i sprawdzać, czy otrzymamy wynik dzielenia z resztą czy bez reszty. Jeżeli wynik dzielenia jest bez reszty, oznacza to, że liczba, przez którą dzieliliśmy daną liczbę, jest jej dzielnikiem. W przeciwnym przypadku nie jest dzielnikiem.

Gdy podzielimy liczbę 27 przez 2 , otrzymamy 13 i resztę 1 . Zatem liczba 2 nie jest dzielnikiem liczby 27 . Gdy podzielimy liczbę 27 przez 3 , otrzymamy liczbę 9 i resztę 0 . Zatem liczba 9 jest dzielnikiem 27 . Pozostałe liczby sprawdzamy w ten sam sposób.

Dzielniki liczby 27 to: 1 , 3 , 9 , 27 , ponieważ $27 : 1 = 27$, $27 : 3 = 9$, $27 : 9 = 3$, $27 : 27 = 1$.

Dzielniki liczby 32 to: 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ponieważ $32 : 1 = 32$, $32 : 2 = 16$, $32 : 4 = 8$, $32 : 8 = 4$, $32 : 16 = 2$, $32 : 32 = 1$.

8. Wielokrotności liczb naturalnych

Wielokrotność liczby naturalnej a to liczba podzielna przez a . Oznacza to, że wielokrotnościami liczby 15 są liczby: 0, 15, 30, 45, 60, 75 itd.

► Zadanie

W skrzynce jest 25 butelek. Ile butelek jest w 4, 6 i 10 takich skrzynkach?

Odpowiedź: W czterech skrzynkach jest $4 \cdot 25 = 100$ butelek, w sześciu skrzynkach jest $6 \cdot 25 = 150$ butelek, a w dziesięciu skrzynkach jest $10 \cdot 25 = 250$ butelek. Liczby 100, 150 i 250 to wielokrotności liczby 25.

9. Liczby pierwsze i złożone

Liczby pierwsze są to liczby naturalne, które mają dokładnie dwa dzielniki – jedynkę i samą siebie. **Liczby złożone** to liczby, które oprócz jedynki i samej siebie mają jeszcze inne dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi, ponieważ liczba 0 jest podzielna przez każdą liczbę, ale nie dzieli się przez siebie, a liczba 1 ma tylko jeden dzielnik, czyli 1.

► Zadanie 1

Ile dzielników mają liczby: 2, 3, 5, 7 i 11?

Odpowiedź: Każda z nich ma dwa dzielniki, czyli 1 i samą siebie. Takie liczby nazywamy pierwszymi.

► Zadanie 2

Ile dzielników ma liczba 4, a ile liczba 15?

Odpowiedź: Liczba 4 ma trzy dzielniki: 1, 2, 4, a liczba 15 ma cztery dzielniki: 1, 3, 5, 15. Liczby 4 i 15 to liczby złożone.

► Zadanie 3

Dane są liczby: 2, 5, 11, 15, 23, 102, 121. Spośród podanych liczb wybierz liczby pierwsze i uzasadnij swój wybór.

Odpowiedź: Liczby pierwsze to 2, 5, 11 i 23, ponieważ dzielnikami liczby 2 są 1 i 2, dzielnikami liczby 5 są 1 i 5, dzielnikami liczby 11 są 1 i 11, a dzielnikami liczby 23 są 1 i 23. Dzielnikami liczby 15 są: 1, 3, 5 i 15, dzielnikami liczby 102 są: 1, 2, 3, 17, 34, 51, 102, a dzielnikami liczby 121 są: 1, 11 i 121.

10. Rozkład liczb złożonych na czynniki pierwsze

Rozkładanie liczby na czynniki pierwsze polega na zapisaniu jej w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Przykład

Jak rozłożyć na czynniki pierwsze liczbę 126?

63	126	2	126 dzielimy przez 2 i pod 126 zapisujemy wynik tego dzielenia, czyli
	63	3	63 dzielimy przez 3 i pod 63 zapisujemy wynik tego dzielenia, czyli 21
	21	3	21 dzielimy przez 3 i pod 21 zapisujemy wynik tego dzielenia, czyli 7
	7	7	7 dzielimy przez 7 i pod 7 zapisujemy wynik tego dzielenia, czyli 1
	1		

Ostatnia czynność, to zapisanie liczby 126 w postaci iloczynu liczb pierwszych, czyli

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

► Zadanie

Rozłóż na czynniki pierwsze liczby: 28, 45, 242, 355, 425.

Odpowiedź

28	2	45	3	242	2	355	5	425	5
14	2	15	3	121	11	71	71	85	5
7	7	5	5	11	11	1		17	17
1		1		1				1	
$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$		$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$		$242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$		$355 = 5 \cdot 71$		$425 = 5 \cdot 5 \cdot 17$	

11. Największy wspólny dzielnik (NWD)

Niech D_{24} oznacza zbiór dzielników liczby 24, a D_{36} zbiór dzielników liczby 36.

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Największa liczba występująca w obu zbiorach to 12, zatem największy wspólny dzielnik (NWD) dla liczb 24 i 36 to 12.

Jeżeli wypiszemy wszystkie dzielniki liczby a i wszystkie dzielniki liczby b , to **największy wspólny dzielnik** liczb a i b , to największa liczba, przez którą są podzielne obie liczby. Jest to największa liczba występująca w obu zbiorach.

Aby znaleźć największy wspólny dzielnik, należy rozłożyć liczby na czynniki pierwsze, a następnie obliczyć iloczyn wspólnych czynników obu liczb.

24	2	36	2
12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

$$\text{NWD}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

► Zadanie

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb: 45 i 105.

Odpowiedź

$$D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

$$D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$$

$$\text{NWD}(45, 105) = 15$$

12. Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych a i b to najmniejsza liczba naturalna większa od zera i podzielna jednocześnie przez a i przez b .

By to zrozumieć, ustalmy, że W_{24} oznacza zbiór wielokrotności liczby 24, a W_{36} zbiór wielokrotności liczby 36.

$$W_{24} = \{24, 48, 72, 96, 120, 144, \dots\}$$

$$W_{36} = \{36, 72, 108, 144, 180, \dots\}$$

Wśród podanych wielokrotności 24 i 36 dwie są takie same: 72 i 144. Mniejszą z nich jest 72, zatem 72 jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 24 i 36.

► Zadanie

Wyznacz NWW (24, 36).

Odpowiedź: Zamiast wypisywać kolejne wielokrotności liczb, można je rozłożyć na czynniki:

24	2	36	2
12	2	18	2
6	2	9	3
3	3	3	3
1		1	

a następnie obliczyć iloczyn wspólnych czynników i czynników różnych.

$\text{NWW}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ – najpierw mnożymy wspólne czynniki, następnie czynniki pozostałe z każdej liczby.

13. Liczby parzyste i nieparzyste

W zbiorze liczb naturalnych co druga liczba jest parzysta, a co druga nieparzysta. **Liczby parzyste** to liczby podzielne przez 2, czyli zakończone cyfrą parzystą.

► Zadanie 1

Czy można ustawić w pary wszystkich uczniów 30-osobowej klasy i klasy 31-osobowej? Ile będzie par?

Odpowiedź: Wszystkich uczniów 30-osobowej klasy można ustawić w pary, co da 15 par, z klasy 31-osobowej nie można, ponieważ jedna osoba pozostanie bez pary. Liczba 30 jest więc liczbą parzystą, a 31 – nieparzystą.

➤ Zadanie 2

Spośród liczb 15, 18 102, 135, 146 wybierz liczby parzyste. Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Liczby parzyste to: 18, ponieważ 8 jest cyfrą parzystą; 102, ponieważ 2 jest cyfrą parzystą i 146, ponieważ 6 również jest cyfrą parzystą.

14. Cechy podzielności liczb

Aby sprawdzić, czy liczba jest podzielna przez 2, 3, 4, 5, 9, 10 lub 25, nie trzeba wykonywać obliczeń. Istnieją bowiem **cechy podzielności**, które ułatwiają to zadanie.

- Przez 2 podzielne są liczby, których cyfrą jedności jest cyfra 0, 2, 4, 6 lub 8.
- Przez 5 podzielne są liczby, których cyfrą jedności jest 0 lub 5.
- Przez 10 podzielne są liczby, których cyfrą jedności jest 0.
- Przez 3 podzielne są liczby, których suma cyfr jest podzielna przez 3.
- Przez 9 podzielne są liczby, których suma cyfr jest podzielna przez 9.
- Przez 4 lub 25 podzielne są liczby, w których liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr jest podzielna odpowiednio przez 4 lub przez 25.

➤ Zadanie

Stosując odpowiednią cechę podzielności, odpowiedz, czy liczby: 204, 405, 1256 są podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9?

Odpowiedź: Liczba 204 jest podzielna przez: 2, ponieważ zakończona jest cyfrą parzystą 4, przez 3, ponieważ suma cyfr wynosi 6, a 6 dzieli się przez 3. Jest również podzielna przez 4, ponieważ 04 dzieli się przez 4. Liczba 204 nie jest podzielna przez 5, ponieważ nie kończy się ani 0 ani 5, i nie jest podzielna przez 9, bo suma cyfr nie dzieli się przez 9.

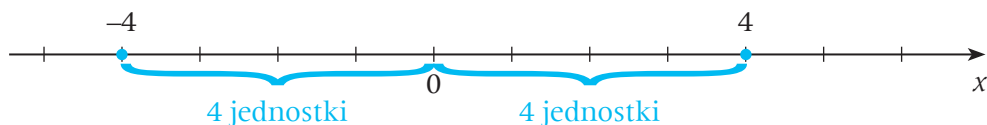
Liczba 405 dzieli się przez 3, ponieważ suma cyfr wynosi 9, a 9 dzieli się przez 3. Dzieli się również przez 5, bo zakończona jest liczbą 5, a także przez 9, ponieważ suma cyfr jest podzielna przez 9.

Nie dzieli się przez 2, ponieważ nie jest zakończona cyfrą parzystą, oraz nie dzieli się przez 4, bo 05 nie dzieli się przez 4.

Liczba 1256 dzieli się przez 2, ponieważ zakończona jest cyfrą parzystą. Dzieli się również przez 4, ponieważ 56 dzieli się przez liczbę 4. Liczba 1256 nie dzieli się przez 3 ani przez 9, ponieważ suma cyfr jest równa 14. Nie dzieli się też przez 5, bo nie jest zakończona na 0 ani na 5.

15. Wartość bezwzględna liczby

Na osi liczbowej zaznaczono 4 i -4 .



Odległość każdej z tych liczb od zera jest taka sama i wynosi 4. Ta odległość to wartość bezwzględna liczby i zapisujemy ją następująco:

$$|-4| = 4$$

$$|4| = 4$$

► Zadanie 1

Podaj wartość bezwzględną każdej z liczb: -3 , $-\frac{2}{5}$, 3 , -1 , 2 , 4 , $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, -1 , $\frac{1}{3}$

Odpowiedź

$$\begin{array}{ll} |-3| = 3 & \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} \\ \left| -\frac{2}{5} \right| = \frac{2}{5} & \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \\ |3| = 3 & |-1| = 1 \\ |-1,2| = 1,2 & \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \\ |4| = 4 & \end{array}$$

► Zadanie 2

Wyznacz wszystkie liczby, których wartość bezwzględna wynosi:

- a) 7 b) 1,4 c) 0 d) -5

Odpowiedź

$$|x| = 7, \text{ więc } x = 7 \text{ lub } x = -7$$

$$|x| = 1,4, \text{ więc } x = 1,4 \text{ lub } x = -1,4$$

$$|x| = 0, \text{ więc } x = 0$$

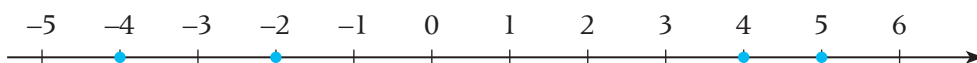
$$|x| = -5. \text{ Nie istnieje taka liczba, której wartość bezwzględna jest ujemna.}$$

PAMIĘTAJ!

Nie istnieje taka liczba, której wartość bezwzględna jest ujemna.

16. Porównywanie liczb całkowitych

Na osi liczbowej niebieską kropką zaznaczono kilka liczb.



Strzałka na osi liczbowej pokazuje kierunek rosnący liczb. Oznacza to, że im dalej na prawo znajduje się liczba, tym jest większa. Największa z zaznaczonych liczb to 5, a najmniejsza -4.

Aby porównać liczby, nie trzeba ich zawsze umieszczać na osi liczbowej. Warto pamiętać, że obowiązują następujące zasady:

- Z dwóch liczb o różnych znakach zawsze większa jest liczba dodatnia.
- Z dwóch liczb dodatnich większa jest ta, której wartość bezwzględna jest większa.
- Z dwóch liczb ujemnych większa jest ta, której wartość bezwzględna jest mniejsza.

► Zadanie

Wstaw między liczby odpowiedni znak: $<$, $>$.

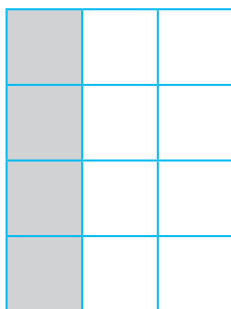
- a) 120 102
 b) -101 -103
 c) -52 46
 d) -36 36

Odpowiedź

- a) $120 > 102$, ponieważ $|120| > |102|$
 b) $-101 > -103$, ponieważ $|-101| = 101$, $|-103| = 103$, $|-101| < |-103|$
 c) $-52 < 46$, ponieważ 46 jest liczbą dodatnią
 d) $-36 < 36$, ponieważ 36 jest liczbą dodatnią

17. Ułamki zwykłe

Prostokąt został podzielony na 12 jednakowych części. Każda z nich to $\frac{1}{12}$ prostokąta. Część zamalowana na szaro to $\frac{4}{12}$ całego prostokąta.

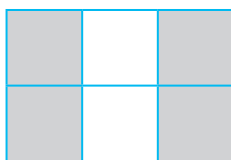


Ten przykład ilustruje, że ułamek jest częścią całości podzielonej na równe części.

Ułamek to wynik dzielenia a przez b zapisany w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a jest **licznikiem**, a b **mianownikiem**.

► Zadanie

Jaką część prostokąta zamalowano na szaro?



Odpowiedź: Ten prostokąt podzielono na 6 jednakowych części. Każda część to $\frac{1}{6}$. Zamalowano 4 części, które stanowią $\frac{4}{6}$.