

Jarosław Jabłonka

NOWA MATURA 2023 i 2024

matematyka



► arkusze ► przykłady ► wymagania

SB
M
WYDAWNICTWO

NOWA MATURA 2023 i 2024

Jarosław Jabłńska

matematyka



► arkusze ► przykłady ► wymagania

Tekst i ilustracje: Jarosław Jabłonka

Redakcja i korekta: zespół wydawnictwa SBM

Opracowanie graficzne i skład: Paweł Bednarek

Projekt okładki: Marek Regner

Zdjęcia na okładce: Dreamstime.com: © Golden Shrimp, © Stockvectorwin, © Arkadi Bojaršinov

© Copyright for the text, cover and layout by Wydawnictwo SBM Sp. z o.o., 2022

Warszawa 2022



Wydawnictwo SBM Sp. z o.o.

ul. Sułkowskiego 2/2

01-602 Warszawa

www.wydawnictwosbm.pl

ISBN 978-83-8222-875-5

Spis treści

Wprowadzenie	6
Powtórka przed maturą	7
Liczby rzeczywiste	7
Zbiory	7
Relacje między zbiorami	7
Działania na zbiorach	7
Przybliżenie liczby	8
Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia	8
Potęgi i pierwiastki	8
Potęga o wykładniku wymiernym	9
Ogólne prawa potęgowania	9
Pierwiastki	9
Logarytmy	9
Wyrażenia algebraiczne i wielomiany	9
Wzory skróconego mnożenia	9
Wielomiany jednej zmiennej	9
Równania, układy równań i nierówności	9
Równania, układy równań i nierówności	9
Równania liniowe z wartością bezwzględną	10
Nierówności z wartością bezwzględną	10
Układy równań liniowych	11
Rozwiązywanie układów równań liniowych	11
Nierówności kwadratowe	11
Układy równań, w których jedno równanie jest stopnia pierwszego, a drugie jest równaniem okręgu lub równaniem paraboli	13
Proste równania wielomianowe	13
Proste równania wymierne	13
Funkcje	14
Ogólne własności funkcji	14
Monotoniczność funkcji	15
Parzystość i nieparzystość funkcji	15
Przekształcanie wykresów funkcji	15
Funkcja liniowa	16
Funkcja kwadratowa	17
Przedziały monotoniczności funkcji	17
Największa oraz najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym $[k, m]$	18
Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej	18
Proporcjonalność odwrotna	19
Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	19

Własności funkcji wykładniczej.....	20
Funkcja logarytmiczna.....	20
Własności funkcji logarytmicznej.....	20
Ciągi.....	21
Własności ciągu arytmetycznego.....	22
Własności ciągu geometrycznego.....	22
Procent składany.....	23
Trygonometria.....	23
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.....	23
Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów	24
Twierdzenie sinusów.....	24
Twierdzenie cosinusów [Carnota].....	25
Planimetria.....	25
Przekształcenia płaszczyzny.....	25
Własności relacji przystawania.....	27
Cechy przystawania trójkątów.....	27
Własności figur podobnych.....	27
Cechy podobieństwa trójkątów.....	28
Twierdzenie Talesa, jego kontrapozycja oraz twierdzenie do niego odwrotne.....	28
Twierdzenie Talesa [wersje 1 i 2]	28
Twierdzenie Talesa [wersja 3].....	29
Równoważne sformułowania twierdzenia Talesa.....	29
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa [wersje 1 i 2].....	30
Geometria trójkąta.....	30
Wzory na pole trójkąta.....	31
Środkowe trójkąta	31
Dwusieczne w trójkącie	31
Twierdzenie o dwusiecznej	32
Symetralne boków.....	32
Własności trójkątów prostokątnych.....	33
Trójkąt równoboczny.....	34
Trójkąt prostokątny o kątach 30° – 90° – 60°	34
Trójkąt prostokątny równoramienny	34
Właściwości wybranych czworokątów.....	34
Okrąg.....	36
Odcinki w okręgu, odcinek koła i wycinek koła	36
Kąty związane z okręgiem.....	37
Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej.....	38
Prosta w układzie współrzędnych.....	38
Odległość punktu od prostej.....	38
Równanie okręgu.....	38
Wzajemne położenie okręgu i prostej.....	39
Symetrie w układzie współrzędnych	39

Stereometria	40
Nazewnictwo graniastosłupów i ostrosłupów	40
Położenie prostych w przestrzeni	40
Prosta prostopadła do płaszczyzny	41
Kąty między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach	42
Kąt dwuścienny	43
Walec, stożek, kula oraz sfera	44
Statystyka, kombinatoryka, prawdopodobieństwo	45
Kombinatoryka	46
Prawdopodobieństwo	46
Własności prawdopodobieństwa	46
Wartość oczekiwana	46
Arkusz 1	47
Wskazówki do rozwiązań	51
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 1	52
Arkusz 2	60
Wskazówki do zadań	64
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 2	65
Arkusz 3	73
Wskazówki	78
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 3	79
Arkusz 4	88
Wskazówki	94
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 4	95
Arkusz 5	105
Wskazówki	109
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 5	110
Arkusz 6	116
Wskazówki	121
Odpowiedzi, rozwiązania i sposoby oceniania zadań z Arkusza 6	122

Wprowadzenie

W latach szkolnych 2022/2023 oraz 2023/2024 pojawi się nowy typ arkusza maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym. Zgodnie z wymogami Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w arkuszu maturalnym występować będą różnego rodzaju zadania zamknięte, za które będzie można otrzymać 1 pkt oraz zdania zamknięte za 2 pkt. Ponadto występować będą zadania otwarte za 1 pkt, 2 pkt, 3 pkt i 4 pkt. W tych latach maksymalna łączna liczba punktów z zadań zamkniętych będzie wynosiła 23, tak samo jak łączna liczba punktów z zadań otwartych.

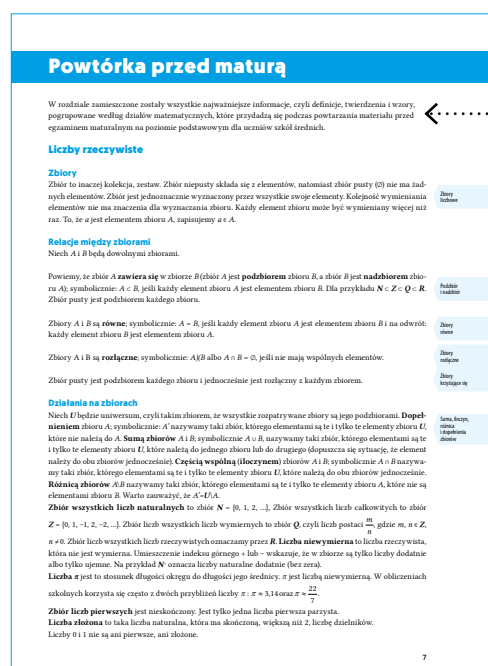
Arkusze próbne zamieszczone w książce mają za zadanie pomóc maturzyście w przygotowaniu do nowej matury. Do każdego zadania podane są wskazówki, które pomogą w sprawdzeniu odpowiedzi przed zobaczeniem poprawnej odpowiedzi czy pełnego rozwiązania. Można je potraktować jako szansę na poprawienie własnej odpowiedzi czy możliwość znalezienia rozwiązania zadania. W przypadku zadań zamkniętych wskazówką jest podanie odpowiedzi błędnych lub zwrócenie uwagi na pewne szczegóły w zadaniu. W przypadku zadań otwartych wskazówkami są zasugerowanie sposobu rozwiązania zadania, zwrócenie uwagi na pewne trudności występujące w trakcie rozwiązywania czy podanie przedziału liczbowego, do którego należy odpowiedź.

W książce znajdują się rozwiązania wszystkich zadań, w tym większości zadań zamkniętych. Niekiedy pokazano więcej niż jedno rozwiązanie.

Jak korzystać z książki

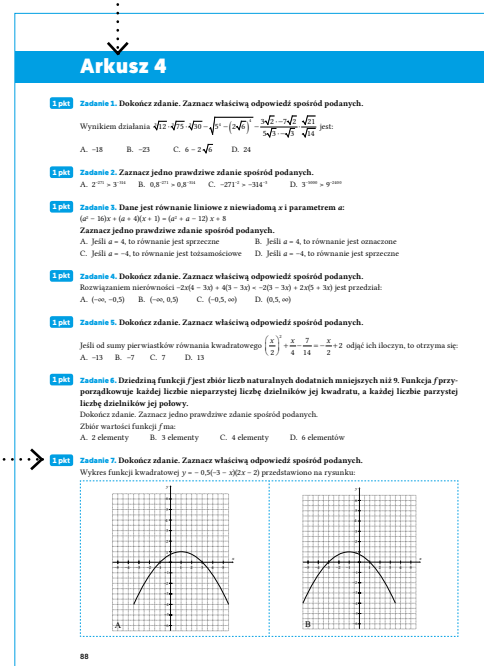
Przed rozpoczęciem korzystania z książki warto zobaczyć, jak zaprojektowane zostały poszczególne elementy książki. Układ jest bardzo intuicyjny, dzięki czemu szybko można znaleźć potrzebne informacje.

Informacje dotyczące danego działu matematycznego, czyli **definicje i twierdzenia** wraz ze wzorami, których znajomość potrzebna jest na egzaminie maturalnym.



Hasła na marginesach, dzięki którym można szybko znaleźć potrzebne informacje.

Arkusze z zadaniami maturalnymi zawierające wskazówki oraz rozwiązania krok po kroku.



Punkty, które można zdobyć na egzaminie maturalnym za rozwiązanie danego zadania.

Powtórka przed maturą

W rozdziale zamieszczone zostały wszystkie najważniejsze informacje, czyli definicje, twierdzenia i wzory, pogrupowane według działów matematycznych, które przydadzą się podczas powtarzania materiału przed egzaminem maturalnym na poziomie podstawowym dla uczniów szkół średnich.

Liczby rzeczywiste

Zbiory

Zbiór to inaczej kolekcja, zestaw. Zbiór niepusty składa się z elementów, natomiast zbiór pusty ($\emptyset$) nie ma żadnych elementów. Zbiór jest jednoznacznie wyznaczony przez wszystkie swoje elementy. Kolejność wymieniania elementów nie ma znaczenia dla wyznaczania zbioru. Każdy element zbioru może być wymieniany więcej niż raz. To, że a jest elementem zbioru A , zapisujemy $a \in A$.

Zbiory
liczbowe

Relacje między zbiorami

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.

Powiemy, że zbiór A **zawiera się** w zbiorze B (zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B , a zbiór B jest **nadzbiorem** zbioru A); symbolicznie: $A \subset B$, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B . Dla przykładu $N \subset Z \subset Q \subset R$. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Podzbiór
i nadzbiór

Zbiory A i B są **równe**; symbolicznie: $A = B$, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót: każdy element zbioru B jest elementem zbioru A .

Zbiory
równe

Zbiory A i B są **rozłączne**; symbolicznie: $A \cap B = \emptyset$ albo $A \cap B = \emptyset$, jeśli nie mają wspólnych elementów.

Zbiory
rozłączne

Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru i jednocześnie jest rozłączny z każdym zbiorem.

Zbiory
krzyżujące się

Działania na zbiorach

Niech U będzie uniwersum, czyli takim zbiorem, że wszystkie rozpatrywane zbiory są jego podzbiorem. **Dopełnieniem** zbioru A ; symbolicznie: A' nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które nie należą do A . **Sumą zbiorów** A i B ; symbolicznie $A \cup B$, nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które należą do jednego zbioru lub do drugiego (dopuszcza się sytuację, że element należy do obu zbiorów jednocześnie). **Częścią wspólną (iloczynem)** zbiorów A i B ; symbolicznie $A \cap B$ nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru U , które należą do obu zbiorów jednocześnie. **Różnicą zbiorów** $A \setminus B$ nazywamy taki zbiór, którego elementami są te i tylko te elementy zbioru A , które nie są elementami zbioru B . Warto zauważyć, że $A' = U \setminus A$.

Suma, iloczyn,
różnica
i dopełnienia
zbiorów

Zbiór wszystkich liczb naturalnych to zbiór $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, Zbiór wszystkich liczb całkowitych to zbiór $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. Zbiór liczb wszystkich liczb wymiernych to zbiór Q , czyli liczb postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in Z$,

$n \neq 0$. Zbiór liczb wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy przez R . **Liczba niewymierna** to liczba rzeczywista, która nie jest wymierna. Umieszczenie indeksu górnego $+$ lub $-$ wskazuje, że w zbiorze są tylko liczby dodatnie albo tylko ujemne. Na przykład N^+ oznacza liczby naturalne dodatnie (bez zera).

Liczba π jest to stosunek długości okręgu do długości jego średnicy. π jest liczbą niewymierną. W obliczeniach szkolnych korzysta się często z dwóch przybliżeń liczby π : $\pi \approx 3,14$ oraz $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony. Jest tylko jedna liczba pierwsza parzysta.

Liczba złożona to taka liczba naturalna, która ma skończoną, większą niż 2, liczbę dzielników.

Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki. Nie ma wzoru określającego wszystkie liczby pierwsze.

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest zdefiniowana następująco:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$:

- $|x| \geq 0$ – wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna,
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – wartość bezwzględna liczby jest równa 0 tylko dla 0,
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ – wartość bezwzględna liczby różnej od zera jest liczbą dodatnią,
- $|x| = |-x|$ – wartość bezwzględna liczby i wartość bezwzględna liczby do niej przeciwnej są równe,
- $x^2 = (-x)^2 = |x|^2$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

Przybliżenie liczby

Liczba jest **przybliżona z niedomiarem**, gdy liczba przybliżona jest mniejsza niż przybliżana. Liczba jest **przybliżana z nadmiarem**, gdy liczba przybliżona jest większa niż przybliżana.

Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

Niech dana będzie liczba L i jej przybliżenie P : $L \approx P$. **Błąd bezwzględny** przybliżenia wyraża się wzorem:

$$\Delta L = |L - P|. \text{ Błąd względny przybliżenia wyraża się wzorem: } \delta L = \frac{\Delta L}{L}.$$

Potęgi i pierwiastki

Potęgi
i pierwiastki

Dla dowolnej liczby a oraz $n \in \mathbf{N}^+$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$. Ponadto przyjmuje się, że $a^0 = 1$, o ile $a \neq 0$.

Potęga liczby
rzeczywistej
o wykładniku
ujemnym

Potęga liczby rzeczywistej $a \neq 0$ o wykładniku całkowitym ujemnym $-n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, definiuje się następująco:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Definicja pierwiastka (arytmetycznego) z liczby rzeczywistej uzależniona jest od parzystości stopnia pierwiastka:

Pierwiastek
arytmetyczny

- Jeżeli n jest liczbą dodatnią liczbą parzystą, to pierwiastkiem (arytmetycznym) n – tego stopnia z liczby rzeczywistej nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , że $b^n = a$.
- Jeżeli n jest liczbą dodatnią liczbą nieparzystą, to pierwiastkiem (arytmetycznym) n – tego stopnia z liczby rzeczywistej a nazywamy taką liczbę b , że $b^n = a$.

Przy założeniu, że jeżeli stopnie pierwiastków są liczbami parzystymi, to a oraz b są nieujemne, zachodzą następujące prawa.

Prawa
pierwiastkowania

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Dodatkowe założenie: $b > 0$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$
---	---	---

Potęga liczby
rzeczywistej

Potęga liczby rzeczywistej $a > 0$ o wykładniku postaci $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, definiuje się następująco: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
Pierwiastkowanie trzeciego stopnia może być wykonane na liczbach ujemnych, dlatego może być wykonane wobec wszystkich liczb i wyrażeń.

Potęga o wykładniku wymiernym

Potęgę liczby rzeczywistej $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{Z}$ o wykładniku postaci $\frac{k}{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, definiuje się następująco:

$$a^{\frac{k}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

Potęga
o wykładniku
wymiernym

Ogólne prawa potęgowania

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, niech $a, b > 0$. Zachodzą wtedy wzory:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}; (a^r)^s = a^{r \cdot s}; \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}; (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r; \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Ogólne prawa
potęgowania

Jeśli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to wzory te zachodzą dla każdego $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Pierwiastki

Własności pierwiastków wynikają z ogólnych praw potęgowania.

Dla $x \geq 0$ zachodzą równości: $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$ oraz $\sqrt[8]{x} = \sqrt{\sqrt[4]{x}}$.

Logarytmy

Logarytmem przy podstawie a ($a > 0$, $a \neq 1$) z liczby b ($b > 0$) nazywamy taką liczbę $c \in \mathbf{R}$, że $a^c = b$.

Logarytm

Zachodzą następujące związki ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $d > 0$, $t \in \mathbf{R}$)

$a^{\log_a b} = b$	$\log_a b^t = t \cdot \log_a b$
$\log_a b + \log_a d = \log_a (bd)$	$\log_a b - \log_a d = \log_a \left(\frac{b}{d}\right)$

Prawa
działań na
logarytmach

Wyrażenia algebraiczne i wielomiany

Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a i b zachodzą wzory:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Wyrażenia $a^2 + b^2$ nie da się rozłożyć na iloczyn.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Wzory
skróconego
mnożenia

Wielomiany jednej zmiennej

Wielomianem stopnia n , gdzie $n \in \mathbf{N}^+$, będziemy nazywać wyrażenie postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbf{R}$ oraz $a_n \neq 0$ to **współczynniki wielomianu**.

Współczynnik a_0 nazywa się **wyrazem wolnym**. $\text{st}(W)$ oznacza stopień wielomianu W .

Wielomianem zerowym nazywamy jedynomian 0.

Wielomian
jednej
zmiennej

Równania, układy równań i nierówności

Równania, układy równań i nierówności

Dwa **równania** (nierówności) są **równoważne w zadanej dziedzinie D** , jeśli część wspólna dziedziny D z zbioru rozwiązań pierwszego równania (nierówności) jest równa części wspólnej dziedziny D i zbioru rozwiązań drugiego równania (nierówności).

Równania
równoważne
w zadanej
dziedzinie

Równania liniowe z wartością bezwzględną

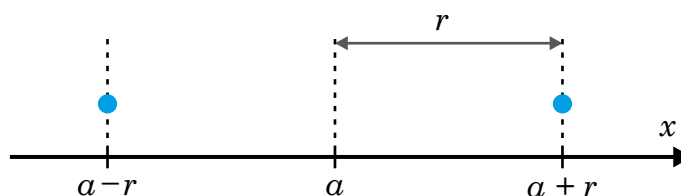
Niech x jest zmienną, zaś $a \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}^+$ będą pewnymi ustalonymi liczbami. Otóż równanie $|x - a| = r$ wyznacza dwie liczby, które są w odległości r od liczby a .

Zbiorem rozwiązań równania:

$$|x - a| = r, \text{ gdzie } a \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R},$$

jest:

- $\{a - r, a + r\}$, gdy $r > 0$,
- $\{a\}$, gdy $r = 0$,
- $\emptyset$, gdy $r < 0$.



Niech $e < f$. Wówczas dla każdego x zachodzą związki:

- $x \in (e, f) \Leftrightarrow |x - c| < r$, gdzie $c = \frac{e+f}{2}$ i $r = \frac{f-e}{2}$.
- $x \in (-\infty, e) \cup (f, +\infty) \Leftrightarrow |x - c| > r$, gdzie $c = \frac{e+f}{2}$ i $r = \frac{f-e}{2}$.
- $x \in (-\infty, e] \cup [f, +\infty) \Leftrightarrow |x - c| \geq r$, gdzie $c = \frac{e+f}{2}$ i $r = \frac{f-e}{2}$.

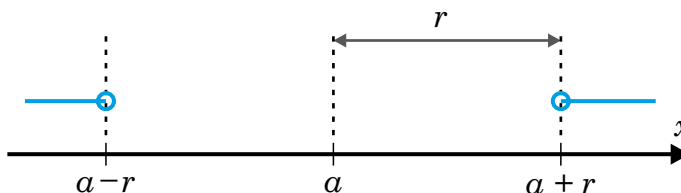
Nierówności z wartością bezwzględną

Zbiorem rozwiązań nierówności

$$|x - a| < r \text{ jest:}$$

- $(a - r, a + r)$, gdy $r > 0$
- zbiór pusty, gdy $r \leq 0$ (ponieważ odległość nie może być ujemna).

Interpretacja geometryczna. Nierówność ta wyznacza te liczby, których odległość od liczby a jest mniejsza niż r .



Nierówność	Zbiór rozwiązań dla		
	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$
$ x - a = r$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a - r, a + r\}$
$ x - a \neq r$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} \setminus \{a\}$	$\mathbf{R} \setminus \{a - r, a + r\}$
$ x - a < r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(a - r, a + r)$
$ x - a \leq r$	$\emptyset$	$\{a - r, a + r\}$	$[a - r, a + r]$
$ x - a > r$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$	$(-\infty, a - r) \cup (a + r, +\infty)$
$ x - a \geq r$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty)$

Układy równań liniowych

Układ dwóch równań liniowych ma postać:

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest taka para wartości x oraz y , że spełnia ona oba równania.

Układ równań nazywa się:

- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie (jedną parę liczb),
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.

W interpretacji geometrycznej równania w układzie równań są równaniami prostych. Rozwiązaniem jest (każdy) punkt wspólny obu prostych. W przypadku układu równań oznaczonych proste przecinają się tylko w jednym punkcie. W przypadku układu równań nieoznaczonych oba równania wyznaczają tę samą prostą. W przypadku układu równań sprzecznych proste wyznaczone przez równania są równoległe, lecz się nie pokrywają.

Rozwiązywanie układów równań liniowych

W metodzie podstawiania wyznaczamy jedną z niewiadomych (np. y) z któregośkolwiek równania, a następnie podstawiamy uzyskane wyrażenie w pozostałym równaniu. Tak otrzymane równanie jest równaniem tylko z drugą niewiadomą (x). Rozwiązujemy to równanie (obliczając x). Tę wartość wstawiamy do wyrażenia wyznaczonego na początku (obliczając y).

W metodzie przeciwnych współczynników mnoży się jedno lub oba równania przez tak dobrane liczby, aby po ich dodaniu otrzymać równanie tylko z jedną niewiadomą.

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układów dwóch równań liniowych.

Do rozwiązania układu potrzebne będą następujące wyznaczniki:

$W = \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = AE - BD$	$W_x = \begin{vmatrix} C & B \\ F & E \end{vmatrix} = CE - BF$	$W_y = \begin{vmatrix} A & C \\ D & F \end{vmatrix} = AF - CD$
--	--	--

Jeżeli $W \neq 0$, to rozwiązanie układu jest jedno:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$$

Jeżeli $W = 0$ oraz $W_x = 0$ i $W_y = 0$, to układ jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

Jeżeli $W = 0$ oraz ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Nierówności kwadratowe

Będziemy rozważać nierówności kwadratowe w postaci:

$f(x) > 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \leq 0$
------------	---------------	------------	---------------

dla $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$.

Zbiór rozwiązań nierówności zależy od znaków wyróżnika kwadratowego (Δ) oraz współczynnika a .

Przy omawianiu rozwiązań będziemy się odwoływać do poniższych schematów, które przedstawiają położenie wykresu funkcji kwadratowej względem osi Ox .

Rozwiązanie
układu równań

Klasyfikacja
układów
równań
liniowych

Wyznacznik
główny układu
równań liniowych
i wyznaczniki
poboczne

$\Delta < 0$. Równanie kwadratowe $f(x) = 0$ nie ma rozwiązań.		
a	Nierówność	Zbiór rozwiązań
$a > 0$	$f(x) > 0$	R
	$f(x) \geq 0$	
	$f(x) < 0$	$\emptyset$
	$f(x) \leq 0$	
$a < 0$	$f(x) < 0$	R
	$f(x) \leq 0$	
	$f(x) > 0$	$\emptyset$
	$f(x) \geq 0$	

$\Delta = 0$. Równanie kwadratowe $f(x) = 0$ ma jedno rozwiązanie $x_0 = -\frac{b}{2a}$.		
a	Nierówność	Zbiór rozwiązań
$a > 0$	$f(x) > 0$	$R \setminus \{x_0\}$
	$f(x) \geq 0$	R
	$f(x) < 0$	$\emptyset$
	$f(x) \leq 0$	$\{x_0\}$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$R \setminus \{x_0\}$
	$f(x) \leq 0$	R
	$f(x) > 0$	$\emptyset$
	$f(x) \geq 0$	$\{x_0\}$

$\Delta > 0$. Równanie kwadratowe $f(x) = 0$ ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.		
a	Nierówność	Zbiór rozwiązań
$a > 0$	$f(x) > 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
	$f(x) \geq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
	$f(x) < 0$	(x_1, x_2)
	$f(x) \leq 0$	$[x_1, x_2]$
$a < 0$	$f(x) < 0$	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
	$f(x) \leq 0$	$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$
	$f(x) > 0$	(x_1, x_2)
	$f(x) \geq 0$	$[x_1, x_2]$